

Задачи

1. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.
2. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .
3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите хорду DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45^\circ$.
4. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите биссектрису AD .
5. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.
6. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC . $AC : AB = 3 : 2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB . Найдите косинус угла ACB .
7. На окружности радиуса 12 с центром в точке O лежат точки A и B . Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K , а стороны BC — в точке H . Расстояние от M до прямой KH равно 3. Найдите величину угла AOB .
8. Биссектриса AE угла A пересекает четырёхугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE . Найдите отношение периметров этих треугольников.
9. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD углы A и D прямые. Известно, что $AB = 1$, $CD = 4$, $AD = 5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA . В каком отношении точка M делит сторону AD ?
10. Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

11. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причём $AC = BC$. На прямой AB взята точка D , удаленная от прямых AC и BC на расстояние 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC .
12. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите углы трапеции.
13. В прямоугольном треугольнике ABC из точки E , расположенной в середине катета BC , опущен перпендикуляр EL на гипотенузу AB . Найдите углы треугольника ABC , если $AE = \sqrt{10}EL$ и $BC \geq AC$.
14. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $AO = 5$ и высота AD равна 8.

* * *

15. В остроугольном треугольнике ABC высота AD , медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O . Найдите $\angle C$, если $OE = 2OC$.
16. Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие внешние касательные. Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина — на другой, а каждая из боковых сторон касается одной из данных окружностей. Докажите, что высота треугольника, опущенная на основание, равна сумме радиусов окружностей.
17. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD имеет тот же радиус, что и вневписанная окружность треугольника ACD , касающаяся стороны AD . Докажите, что этот радиус равен четверти высоты треугольника, опущенной на его боковую сторону.