Теорема 1. (формулы площади треугольника) *Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; p — полупериметр, тогда*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Задачи

1. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

2. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

3. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей, равна 2.

4. В треугольник со сторонами a, b и углом α между ними вписан полукруг с диаметром на третьей стороне. Найдите его радиус.

5. Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите биссектрису, проведённую из вершины этого угла.

6°. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

7. Найдите площадь трапеции а) с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4; б) с основаниями 6 и 3 и диагоналями 7 и 8.

8. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее основания равны 40 и 24, а диагонали взаимно перпендикулярны.

9. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.

10. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K, причем $\angle AKB = 30^\circ$. Найдите площадь треугольника ABC.

11. В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите площадь треугольника.

12. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь треугольника разделилась на три части: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.

13. Точки B_1 и C_1 основания высот BB_1 и CC_1 треугольника ABC, площадь которого равна S, а угол BAC равен α. Найдите площадь треугольника AB_1C_1.

14. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

15. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BP. Известно, что $\angle APB = \angle BMA$, косинус угла ACB равен $0,8$ и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

16. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке K, причем $\angle AKD = 30^\circ$. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна S.

17. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина CD. O — точка пересечения биссектрисы угла ABC с отрезком AE. Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

18. CD — биссектриса треугольника ABC. Через точки A, D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE, если $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$.

19. Из точки P расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

20. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC. Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

21. В окружность радиуса 7 вписан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, площадь треугольника BCD в два раза меньше площади треугольника ABD, $\angle ADC = 120^\circ$. Найдите стороны четырехугольника $ABCD$.

22. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

23. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

24. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

* * *

25. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите стороны параллелограмма.

26. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k.

27. E — точка пересечения продолжения медианы AD треугольника ABC с описанной около него окружностью. Известно, что $AD + AB = DE$, $\angle BAD = 60°$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC.

28. Две окружности пересекаются в точках A и K. Центры окружностей лежат по разные стороны от прямой AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая AB касается одной окружности в точке A. Прямая AC касается другой окружности в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, если $BK = 1$, $CK = 4$ и $\operatorname{tg}\angle CAB = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

29. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной около ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.

30. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным $30°$, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

31. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен $120°$. Найдите площадь треугольника.

32. (*Задача Люилье*) Пусть r — радиус вписанной окружности, а r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ соответственно; S — площадь треугольника ABC. Докажите, что а) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$; б) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

33. (*Формула Брахмагупты*) Докажите, что если стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c и d, а $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, то его площадь S может быть вычислена по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

34. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Докажите, что трапеция и треугольник равновелики.

35*. Стороны четырехугольника равны a, b, c и d. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

36*. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$, причем равенство достигается только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

37*. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника.

38*. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.

39. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC соответственно построены как на диаметрах полуокружности S_1, S_2 и S_3 по одну сторону от прямой AC. Пусть D — точка на S_3, проекция которой на AC совпадает с точкой B. Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках E и F.
а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 в точке D.
б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.
в)* Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a.

40*. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Докажите, что его площадь меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$.