

ТЕОРЕМА 1. Пусть a , b , c — стороны треугольника; α , β , γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности, тогда

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Задачи

- Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, а угол при вершине равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними 60° .
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными a , a и b .
- Дан треугольник ABC , в котором $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите $\angle BAC$.
- Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом, равным 30° , если известно, что биссектриса, проведённая из вершины прямого угла, равна a .
- Боковая сторона трапеции равна a , средняя линия равна b , а угол при большем основании равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.
- Основания равнобокой трапеции равны 9 и 21, высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.
- Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину делит его на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.
- С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
- В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD — биссектриса. Найдите BD .
- Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D , а на стороне AC точка M так, что CD — биссектриса угла ACB , $DM \parallel BC$ и $AM = a$. Найдите CM .
- В треугольнике известны сторона a и два прилежащих к ней угла β и γ . Найдите биссектрису, проведённую из вершины третьего угла.
- Медиана AM треугольника ABC равна m и образует углы α и β со сторонами AB и AC соответственно. Найдите эти стороны.
- Углы треугольника равны α , β , γ , а периметр равен P . Найдите стороны треугольника.
- Одна из боковых сторон трапеции образует с большим основанием угол α , а вторая равна a и образует с меньшим основанием угол β . Найдите среднюю линию трапеции, если меньшее основание равно b .
- В круге радиуса 12 хорда AB равна 6, хорда BC равна 4. Найдите хорду AC .
- Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около неё, если известно, что эти окружности существуют.
- На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен правильный треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C , если $AB = a$ и $\angle C = 120^\circ$.
- Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60° . Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны.
- Докажите, что если стороны a , b и противолежащие им углы α и β связаны соотношениями $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta}$, то треугольник равнобедренный.
- Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках C и D , причём точка A лежит между C и D , а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB .
- Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r , пересекающая сторону BC в точке D . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и C , если $AB = c$ и $AC = b$.
- Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.
- Каждое из оснований высот треугольника проектируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не зависит от выбора высоты.
- На окружности, описанной около треугольника ABC найдите точку M такую, что расстояние между её проекциями на прямые AC и BC максимально.

26. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .
- 27°. Высоты треугольника пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , ABH , ACH , BCH , равны между собой.
28. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найдите радиус окружности.
29. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC .
30. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- 31°. Постройте треугольник по углу и радиусам вписанной и описанной окружности.
32. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A , C и точку пересечения высот треугольника ABC . Найдите AC .
33. Дан отрезок AB и точка C на нем. Найдите геометрическое место точек пересечения двух равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C , другая — через точки B и C .
34. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q . Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = \frac{6}{5}a$.
35. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

36. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D . N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите
- радиус окружности, описанной около треугольника ACD ;
 - отношение высот треугольников NAC и NAD , опущенных из вершины N .
37. В треугольник ABC помещены три равных окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны R и r .
38. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведённая к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1 : 2.
39. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L , а продолжения сторон AB и CD в точке K . Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $DK = c$. Найдите BL .
40. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна $\sqrt{3}$, диагональ BD равна 1, а углы ABD , BCA и BDC равны 120° , 30° и 60° соответственно. Найдите сторону BC .
41. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C , центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.
42. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK , причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC . Докажите, что $BK = \frac{1}{\sqrt{2}}|AK - CK|$ и $DK = \frac{1}{\sqrt{2}}(AK + CK)$.
43. В треугольнике ABC угол ABC равен α , угол BCA равен 2α . Окружность, проходящая через точки A , C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M . Найдите отношение $AM : AB$.