Определение. Скалярным произведением векторов $\overline{a} = (x_1, y_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2)$ называется число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Задачи

1°. Докажите следующие свойства скалярного произведения:

а) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

б) $\alpha\overline{a} \cdot \overline{b} = \alpha(\overline{b} \cdot \overline{a})$;

в) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$;

г) $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$;

д) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi.$$

е) $(\overline{a} + \overline{b})^2 = \overline{a}^2 + 2 \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) + \overline{b}^2$;

ж) $(\overline{a} \cdot \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2 \cdot \overline{b}^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;

з) ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

2. Даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Докажите, что вектор $\overline{c}$ перпендикулярен вектору $(\overline{b} \cdot \overline{c})\overline{a} - (\overline{a} \cdot \overline{c})\overline{b}$.

3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны и перпендикулярны. Точки P, Q, R и S лежат на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно, причём $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA$. Докажите, что $PR \perp QS$ и $PR = QS$.

4. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин.

5. Пусть A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0.$$

Пользуясь этим равенством докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

6. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KMD = 90°$.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $AMNB$ и $CKLA$. Докажите, что медиана AP треугольника ABC перпендикулярна прямой ML.

8. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

9. (*Теорема Стюарта*) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

Дополнительные задачи

10. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите, что

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\frac{3}{2}$.

Когда достигаются равенства?

11. Пусть a, b, c — стороны треугольника, R — радиус описанной окружности. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$$