Определение. Пусть A и B — точки плоскости. *Вектором* $\overline{AB}$ с концами A и B называется направленный отрезок AB. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются равными, если отрезки AB и CD равны, а лучи AB и CD имеют одинаковые направления. Вектор $\overline{BA}$ называется противоположным к $\overline{AB}$ и обозначается $-\overline{AB}$. Вектор, у которого начало совпадает с концом называется *нулевым вектором* и обозначается $\overline{0}$.

Определение. Пусть точки A и B имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Координатами вектора $\overline{AB}$ называется упорядоченная пара чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Теорема 1. *Равные векторы имеют равные координаты.*

Определение. Для любых трёх точек A, B и C верны равенства $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ и $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}$.

Определение. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *коллинеарными*, если прямые AB и CD совпадают или параллельны.

Теорема 2. *Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overline{a} = k \cdot \overline{b}$, где k — некоторое число.*

Теорема 3. *Любой вектор можно единственным образом разложить по двум неколлинеарным векторам.*

Задачи

1°. Пусть M — середина отрезка AB, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$

2. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $BM : MC = 2 : 5$. Известно, что $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Найдите вектор $\overline{AM}$.

3. Даны точки $A(1; -1)$, $B(-5; 1)$, $C(3; 2)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$ и координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

4. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overline{AM}$ через векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

5. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $AM : MB = AN : NC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overline{MN}$ через вектор $\overline{CB}$.

6. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{CD})$.

7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AF} = \overline{b}$. Найдите векторы $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{FD}$ и $\overline{BM}$, где M — середина стороны EF.

8. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$.

9. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

10. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $ACFG$. Докажите, что из отрезков KN, MF и GL можно составить треугольник.

11. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2 \ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

12. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что для любой точки O выполняется равенство

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

13°. Дан треугольник ABC и точка M. Известно, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

14°. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, причём $BD : DC = m : n$. Выразите вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

15°. Пусть M — середина отрезка AB, M_1 — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{2}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1}).$$

16°. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка. Докажите, что
$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

17°. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим координат вершин.

18. Из медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника составлен треугольник KMN, а из медиан KK_1, MM_1, NN_1 треугольника KMN — треугольник PQR. Докажите, что третий треугольник подобен первому и найдите коэффициент подобия.

19. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите, что $\overline{MN} = \frac{1}{3}(\overline{AP} + \overline{BQ} + \overline{CR})$.

20. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Докажите, что $\overline{OO_1} = \frac{1}{4}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} + \overline{DD_1})$.

21. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления совпадают.

22. Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны, O — центр треугольника. Докажите, что
$$\overline{MK_1} + \overline{MK_2} + \overline{MK_3} = \frac{3}{2}\overline{MO}.$$

23. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

24°. Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство
$$\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$$
является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B, C одной прямой.

25. В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — центр вписанной окружности. Разложите вектор $\overline{OC}$ по векторам $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$.

26°. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

27°. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

28. На стороне AB треугольника ABC с углом ABC, равным α, расположена точка K, причём $AK = BC$. Пусть P — середина BK, M — середина AC. Найдите угол APM.

29. Пусть O — центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, X — произвольная точка плоскости. Докажите, что а) $\overline{OA_1} + \cdots + \overline{OA_n} = \overline{0}$; б) $\overline{XA_1} + \cdots + \overline{XA_n} = n\overline{XO}$.

30. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам.

Дополнительные задачи

31. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

32. Точки K, N, L, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём $AK : KB = DL : LC = \alpha$, $AM : MD = BN : NC = \beta$. Докажите, что точка пересечения P отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях, то есть $MP : PN = \alpha$, $KP : PL = \beta$.

33. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB, BEC и CFA ($\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k$, $\angle ADB = \angle BEC = \angle CFA = \alpha$.) Докажите, что
а) середины отрезков AC, DC, BC и EF — вершины параллелограмма;
б) у этого параллелограмма два угла равны α, а отношение сторон равно k.