

ТЕОРЕМА 1. Пусть a, b, c — стороны треугольника; α — угол, противолежащий стороне a . Тогда

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Задачи

- 1°. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Найдите коэффициент подобия треугольников A_1B_1C и ABC , если $\angle ACB = \alpha$.
2. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.
3. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Верно ли, что треугольник остроугольный.
4. Дан равносторонний треугольник со стороной a . Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 2 : 1.
5. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет BC равен 3. На гипотенузе взята точка M , причём $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM .
6. Одна сторона треугольника вдвое больше другой, а угол между ними равен 60° . Докажите, что треугольник прямоугольный.
7. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие образуют угол в 30° и относятся, как 1 : $2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.
8. Одна из сторон параллелограмма равна 10, диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.
9. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 10 и 3, $CD = 4$, $\angle ADC = 60^\circ$. Найдите диагонали трапеции.
10. Стороны треугольника равны 6 и $2\sqrt{7}$, а угол, противолежащий второй стороне, равен 60° . Найдите третью сторону треугольника.
11. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причём $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN , если известно, что сторона ромба равна a , а $\angle BAD = 60^\circ$.
- 12°. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
13. Диагональ параллелограмма, равная b перпендикулярна стороне, равной a . Найдите вторую диагональ.
14. В равнобедренном треугольнике к боковой стороне, равной 4, проведена медиана, равная 3. Найдите основание треугольника.
- 15°. Стороны треугольника равны a, b, c . Найдите медиану, проведённую к стороне, равной c .
16. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.
17. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно 3 : 4.
18. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание AC в точке D . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$ и $\angle ABC = 120^\circ$.
19. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной $3a$, причём $AM : MC = 1 : 2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются вершинами другого равностороннего треугольника KLM . Найдите его стороны.
20. В треугольнике ABC сторона AC больше AB . Какая из медиан больше, проведённая из вершины B или из вершины C ?
21. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 3, BC = 4, CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC .
22. Можно ли около четырёхугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle D = 30^\circ, AB = 3, BC = 4$ и $AC = 6$?
23. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.

24. В треугольнике ABC известно, что $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M , для которой $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM .
25. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями 3 и 7 и боковыми сторонами, равными 2 и 5.
26. Медианы треугольника ABC , проведённые из вершин B и C , равны 6 и 9 и пересекаются в точке M . Известно, что $\angle BMC = 120^\circ$. Найдите стороны треугольника.
27. Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ равны 2 и 4 соответственно, $\angle BAD = 60^\circ$. Точки M и N середины сторон BC и CD соответственно. Найдите косинус угла MAN .
28. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке M , причём $AM = 1$, $BM = 4$ и $\angle BAC = 120^\circ$. Найдите CM .
29. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, касается гипотенузы в точке M . Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.
30. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?
31. В выпуклом четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны a и b и пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали четырёхугольника.
32. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны c и d и пересекаются под углом 45° . Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника.
33. В окружности проведены две хорды AB и BC , причём $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.
34. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, а боковая сторона CD равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A , B и C , пересекает прямую AD в точке M , $\angle AMB = 60^\circ$. Найдите BM .
35. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом 45° при вершине A , причём $\angle AMD = 90^\circ$ и $BM : MC = 2 : 3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.
36. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC , AC в точках M , D , N соответственно. Найдите MD , если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$.
37. В окружности радиуса R проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол в $22,5^\circ$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C . Найдите медиану AM треугольника ABC .
38. Точка B лежит вне окружности, с диаметром AC . Отрезок AB пересекается с окружностью в точке P , отрезок CB — в точке Q . Известно, что $\angle ABC = 45^\circ$, $AB : AC = 1 : \sqrt{3}$. Найдите $CP : AQ$.

Дополнительные задачи

39. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$; $\angle BAD = 30^\circ$ и $\angle ADC = 60^\circ$. Через точку D проведена прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри трапеции.
40. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : AC : AB$.
41. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5. Её проекции на стороны AB и AC равны соответственно 4 и $2\sqrt{5}$. Найдите BC .
42. (Теорема Стюарта) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC . Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

43. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность радиуса $2/\sqrt{3}$, вписанная в треугольник ABD , касается стороны AB в точке M , а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BDC , касается стороны BC в точке N . Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найдите стороны треугольника ABC .

44. Даны отрезки a и b . Постройте отрезок, равный $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.
45. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C . Найдите AC .