

ТЕОРЕМА 1. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

ТЕОРЕМА 2. Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

### Задачи

1. Верна ли теорема, обратная теореме 2?
2. Через точку  $P$ , удалённую на расстояние, равное 7, от центра окружности радиуса 11, проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые хорда делится точкой  $P$ .
3. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 1 : 2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.
4. Во вписанном четырёхугольнике  $ABCD$ , диагонали которого пересекаются в точке  $K$ , известно, что  $AB = a$ ,  $BK = b$ ,  $AK = c$ ,  $CD = d$ . Найдите  $AC$ .
5. (Степень точки относительно окружности.) Точка  $M$  лежит внутри окружности радиуса  $R$  и удалена от центра на расстояние  $d$ . Докажите, что для любой хорды  $AB$  этой окружности, проходящей через точку  $M$ , произведение  $AM \cdot BM$  одно и то же. Чему оно равно?
6. Точка  $M$  лежит вне окружности радиуса  $R$  и удалена от центра на расстояние  $d$ . Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку  $M$  и пересекающей окружность в точках  $A$  и  $B$ , произведение  $AM \cdot BM$  одно и то же. Чему оно равно?
7. В квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$  вписана окружность, которая касается стороны  $CD$  в точке  $E$ . Найдите величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой  $AE$ .
8. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $BC = c$ . Вписанная окружность, радиус которой равен  $r$ , касается катета  $AC$  в точке  $D$ . Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой  $BD$ .
9. Из точки  $A$ , лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки  $A$  до точки касания равно 16, а расстояние от точки  $A$  до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.
10. Пересекающиеся хорды окружности делятся точкой пересечения в одном и том же отношении. Докажите, что эти хорды равны между собой.
11. В круге проведены две хорды  $AB$  и  $CD$ , пересекающиеся в точке  $M$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BMD$  с хордой  $BD$ . Найдите отрезки  $BK$  и  $KD$ , если  $BD = 3$ , а площади треугольников  $CMB$  и  $AMD$  относятся как 1 : 4.
- 12°. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . В каждой из этих окружностей проведены хорды  $AC$  и  $AD$  так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите  $AB$ , если  $CB = a$ ,  $DB = b$ .
- 13°. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам их общую касательную.
14. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.
15. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках  $K_1$  и  $K_2$ , другая — в точках  $L_1$  и  $L_2$ . Докажите, что прямая  $K_1L_2$  отсекает на окружностях равные хорды.
16. Диагональ  $AC$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является биссектрисой угла  $BAD$  и пересекается с диагональю  $BD$  в точке  $K$ . Найдите  $KC$ , если  $BC = 4$  и  $AK = 6$ .
17. Продолжение медианы треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $A$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ . Найдите  $BC$ , если  $AC = DC = 1$ .
18. Сторона  $AD$  квадрата  $ABCD$  равна 1 и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная  $BK$  равна 2. Найдите диаметр окружности.
19. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8, 10 проведена касательная к описанной окружности этого треугольника. Найдите отрезок касательной, заключённый между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.
20. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с катетами  $AB = 3$  и  $BC = 4$  через середины сторон  $AB$  и  $AC$  проведена окружность, касающаяся  $BC$ . Найдите длину отрезка гипотенузы, который лежит внутри окружности.
21. Точка  $B$  расположена между точками  $A$  и  $C$ . На отрезках  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная  $AC$  и проходящая через точку  $B$  пересекает большую окружность в точке  $D$ . Прямая, проходящая через точку  $C$ , касается меньшей окружности в точке  $K$ . Докажите, что  $CD = CK$ .
- 22°. Постройте окружность, проходящую через две данные точки, и касающуюся данной прямой.

23. Окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $D$  и  $E$ . Найдите высоту треугольника  $ABC$ , опущенную из точки  $A$ , если  $AB = 5$ ,  $AC = 2$ , а точки  $A$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $C$  лежат на одной окружности.
24. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) проведены биссектрисы  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Найдите  $BC$ , если известно, что  $AC = 1$ , а вершина  $A$  лежит на окружности, проходящей через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ .
25. Точки  $A_1$  и  $B_1$  принадлежат соответственно сторонам  $OA$  и  $OB$  угла  $AOB$  (не равного  $180^\circ$ ) и  $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$  принадлежат одной окружности.
26. Через точку  $P$ , лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда  $KM$  одной и хорда  $LN$  второй окружностей. Докажите, что четырёхугольник  $KLMN$  — вписанный.
- 27°. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.
- 28°. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей пересекаются в одной точке.
29. Две окружности внутренне касаются. Диаметр  $AD$  большей окружности пересекает меньшую окружность в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отношение радиусов окружностей, если  $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$ .
30. Точка  $B$  расположена на прямой  $AC$  между точками  $A$  и  $C$ . Через точку  $C$  проводятся касательные к окружностям, проходящим и через точку  $A$  и через точку  $B$ . Найдите геометрическое место точек касания.
31. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если длина одной из хорд равна  $a$ .
32. В окружность вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит две другие стороны на три равные части. Найдите отношение радиусов окружностей.
33. Окружность касается сторон  $AB$  и  $AD$  прямоугольника  $ABCD$ , проходит через вершину  $C$  и пересекает сторону  $CD$  в точке  $N$ . Найдите площадь трапеции  $ABND$ , если  $AB = 9$  и  $AD = 8$ .
34. Окружность касается сторон угла с вершиной  $O$  в точках  $A$  и  $B$ . Из точки  $A$  параллельно  $OB$  проведён луч, пересекающий окружность в точке  $C$ .  $OC$  пересекает окружность в точке  $E$ . Прямые  $AE$  и  $OB$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что  $OK = KB$ .
35. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.
36. На продолжении хорды  $KL$  окружности с центром  $O$  взята точка  $A$ , и из неё проведены касательные  $AP$  и  $AQ$ ,  $M$  — середина  $PQ$ . Докажите, что  $\angle MKO = \angle MLO$ .

#### Дополнительные задачи

37. Две окружности, радиусов  $r$  и  $R$  ( $R > r$ ), касаются внешним образом. Прямая касается этих окружностей в точках  $M$  и  $N$ . В точках  $A$  и  $B$  окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые  $AB$  и  $MN$  пересекаются в точке  $C$ . Из точки  $C$  проведена касательная  $CD$  к третьей окружности. Найдите  $CD$ .
38. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям равны.
39. (Теорема Птолемея) Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению его диагоналей.
40. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности.
41. В треугольнике  $KLM$  проведена биссектриса  $MN$ . Через вершину  $M$  проходит окружность, касающаяся стороны  $KL$  в точке  $N$  и пересекающая сторону  $KM$  в точке  $P$ , а сторону  $LM$  — в точке  $Q$ . Найдите  $MN$ , если  $KP = k$ ,  $QM = m$ ,  $LQ = q$ .
42. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ , а продолжения  $BC$  и  $AD$  — в точке  $L$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $KBC$ ,  $KAD$ ,  $LAB$  и  $LCD$  пересекаются в одной точке (точка Микеля).
43. Противоположные стороны четырёхугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Найдите  $PQ$ , если касательные к окружности, проведённые из точек  $P$  и  $Q$  равны  $a$  и  $b$ .