

ТЕОРЕМА 1. Косинус, синус и тангенс острого угла зависят только от градусной меры угла и не зависят от расположения и размеров треугольника.

ТЕОРЕМА 2. (Пифагора) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

ТЕОРЕМА 3. Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

ТЕОРЕМА 4. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

Задачи

1. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?
2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.
3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известно, что $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите гипотенузу и второй катет.
4. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен 60° .
5. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , а основание равно 8. Найдите боковые стороны.
6. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен 120° . Найдите диагонали трапеции.
7. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла делит гипотенузу на отрезки равные a и b . Найдите катеты.
8. Прямая, проходящая через точку M , удалённую от центра окружности радиуса 10, на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A . Найдите AM .
9. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B , пересекаются в точке M . Найдите хорду AB , если отрезок MO делится ею на отрезки, равные 2 и 18.
10. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.
11. Найдите высоту трапеции со сторонами, равными 10, 10, 10 и 26.
12. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, если стороны треугольника равны 10, 13, 13.
- 13°. Найдите высоту, радиусы вписанной и описанной окружностей правильного треугольника со стороной a .
14. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.
15. Даны отрезки a и b . Постройте отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.
16. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведённую к большей стороне.
17. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.
18. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.
19. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к боковой стороне, если основание равно a , а боковая сторона равна b .
20. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.
21. Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной a и b . Найдите диагонали ромба.
22. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны a и b . Найдите сторону квадрата.
23. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.
24. Две вершины квадрата расположены на основании AB равнобедренного треугольника ABC , а две другие — на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если $AB = a$, а угол при основании равен 30° .
25. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.

26. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол, равный α . Найдите расстояние от точки C до диаметра AB .
27. Диагональ равнобокой трапеции равна a , а средняя линия равна b . Найдите высоту трапеции.
28. Прямые содержащие боковые стороны трапеции пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.
29. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r , а острый угол ромба равен α . Найдите сторону ромба.
30. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.
31. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O . Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.
32. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a , а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.
33. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите остальные стороны треугольника.
34. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$, высота, опущенная на основание, равна h . Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.
35. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной, равной a . Найдите MN .
36. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника равен R , угол при основании равен α . Найдите стороны треугольника.
- 37°. Даны отрезки a и b . Построить отрезок \sqrt{ab} .
38. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD , причём $AD \cdot BD = CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC прямоугольный?
39. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 75^\circ$.
40. Медианы, проведённые к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b . Найдите гипотенузу.
41. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D , причём $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите BC .
42. На высоте CH прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки равные 12 и 18. Найдите AC и BC .
43. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.
44. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.
45. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите все стороны трапеции, если её высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.
46. Диагональ равнобокой трапеции равна a и образует с большим основанием и боковой стороной углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.
47. Боковая сторона CD и основание BC трапеции $ABCD$ равны a , $AD = 2a$, $AC = b$. Найдите AB .
48. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 28. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе, касается обоих катетов. Найдите её радиус.
49. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведён к ней перпендикуляр. Отрезок перпендикуляра, заключённый внутри треугольника равен c , а отрезок, заключённый между одним катетом и продолжением другого равен $3c$. Найдите гипотенузу.
- 50°. Окружность, вписанная в трапецию делит её боковую сторону на отрезки, равные a и b . Найдите радиус окружности.
51. Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно $\frac{4}{3}R$. Найдите остальные стороны трапеции.
- 52°. Даны окружности радиусов r и R ($R > r$). Расстояние между их центрами равно a ($a > R + r$). Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключённые между точками касания.
53. Длины основания CD , диагонали BD и боковой стороны AD трапеции $ABCD$ равны p , а длина боковой стороны BC равна q . Найдите длину диагонали AC .

54°. Окружности радиусов r и R ($R > r$) касаются внешним образом в точке K . Точки A , D и B , C — точки касания их общих внешних касательных с меньшей и большей окружностью соответственно;

- а) найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключённый между внешними касательными;
 б) докажите, что углы AKB и O_1MO_2 — прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей);
 в) найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

55. Стороны параллелограмма равны a и b , а угол между ними равен α . Найдите стороны и диагонали четырёхугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.

56. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM пересекает прямую DF в точке N . Найдите длину отрезка CN , если длины катетов равны 1 и 4.

57. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD , если $AC = a$.

58. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

59. В круге проведены два диаметра AB и CD , M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$, $CM = 24$. Найдите DM .

60. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник разделен медианой, проведённой из вершины прямого угла.

61. Найдите радиусы вписанной и невписанных окружностей треугольника со сторонами а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

62. В треугольнике ABC угол C равен 60° . Найдите расстояние между точками касания со стороной BC вписанной окружности радиуса 2 и невписанной окружности радиуса 3.

63. В треугольнике ABC угол BAC равен 60° , радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}-1$, радиус невписанной окружности, касающейся стороны BC равен $\sqrt{3}+1$. Найдите углы ABC и ACB .

64. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C , проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

65. Из точки A к окружности радиуса 2 проведена касательная AK , $\angle OAK = 60^\circ$. M — точка пересечения окружности с отрезком OA . Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK , AM и дуги MK .

66. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R . Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P . Найдите

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 \text{ и } AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

67. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

68. Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

69°. Найдите геометрическое место точек M , разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.

70. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны между собой.

71. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

72. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

73. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

74. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

75. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90^\circ$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNB$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC , а точки M и C — по разные стороны от прямой AB . Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = b$, $AC = a$.