Задачи

1°. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

2. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке M. Докажите, что $BM : MC = AB : AC$.

3°. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $BD : AB = DC : AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

4°. В треугольнике ABC известно, что $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$. Найдите в каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла C?

5. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найдите BC.

6. Прямая, параллельная основаниям трапеции делит ее на две равновеликие части. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

7°. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b. Найдите диаметр окружности.

8. Через некоторую точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями $S_1,\ S_2,\ S_3$. Найдите площадь данного треугольника.

9. Каждая сторона треугольника поделена на три равные части. Точки деления, взятые через одну, служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S.

10. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что $CM = 2,4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

11°. На сторонах $AB,\ BC$ и AC треугольника ABC взяты соответственно точки $C_1,\ A_1$ и B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.

12. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $M,\ N,\ L$ и K, причем $AM : MB = CK : KD = 1 : 2$, а $BN : NC = DL : LA = 1 : 3$. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого — пересечения отрезков $AN,\ BK,\ CL$ и DM, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

13. В треугольнике со сторонами $a,\ b$ и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

14. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

16. Через точку K, данную на стороне AB треугольника ABC, проведите прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника ABC пополам.

17. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.

18. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2. С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l_1 и l_2.

19. Равны ли треугольники по двум сторонам и трем углам?

20. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Известно, что площади треугольников ABE и DCE равны по 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найдите BC.

21°. (*Теорема Менелая.*) Дан треугольник ABC. Некоторая прямая пересекает его стороны AB, BC и продолжение стороны AC в точках $C_1,\ A_1$ и B_1 соответственно. Докажите, что:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

22°. (*Теорема Чевы.*) Пусть точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

23. С помощью теоремы Чевы докажите, что в одной точке пересекаются

а) медианы треугольника;

б) биссектрисы треугольника;

в) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон треугольника (*точка Жергона*);

г) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вневписанные окружности касаются противоположных сторон треугольника (*точка Нагеля*);

24. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \| AB$.

25. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC.

26. Сторона неравнобедренного треугольника равна среднему арифметическому двух других сторон. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис треугольника, параллельна этой стороне.

27°. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2MO$.

28. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот H с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), причём центром этой окружности является середина отрезка OH, где O — центр описанной окружности.

29. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P, и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q. Вычислите длину отрезка BP, если известно, что $AB = c$, $BC = a$ и $BQ = p$.

30. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трём высотам.

31. Все стороны выпуклого четырёхугольника площади 1 разделены на три равные части. Отрезки, соединяющие соответствующие точки деления на противоположных сторонах, разбивают четырёхугольник на 9 четырёхугольников. Найдите площадь внутреннего четырёхугольника разбиения.

32. На сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты соответственно точки K и L так, что $AK : AB = DL : DC$. Прямые AL и KD пересекаются в точке P. Докажите, что треугольники APC и BPD равновелики.

33. (*Теорема Птолемея*) Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

34. Расстояния от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равны d_a, d_b и d_c (a, b и c длины сторон, соответственно). Докажите, что $d_a + d_b + d_c = R + r$.

Дополнительные задачи

35. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояние от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.

36. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD в точке Q. Докажите, что середина отрезка PQ и середины диагоналей AC и BD лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*).

37. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены точки соответственно C_1, B_1 и A_1, причём треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O, причём $BO : OB_1 = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

38. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1; B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольник $A_1B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.