

**ТЕОРЕМА 1.** (о пропорциональных отрезках) *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.*

**Определение.** Два треугольника называются *подобными*, если они имеют равные углы и соответствующие стороны пропорциональны. Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия*.

**ТЕОРЕМА 2.** *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, образуют с его сторонами подобные между собой треугольники.*

**ТЕОРЕМА 3.** (признаки подобия треугольников) *Два треугольника подобны, если:*

- 1) *Два угла одного из них соответственно равны двум углам другого.*
- 2) *Две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами равны.*
- 3) *Три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.*

**ТЕОРЕМА 4.** *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

### Задачи

- 1°. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
- 2°. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника.
- 3°. Каждая из сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  разделена соответственно точками  $M$  и  $N$  в отношении  $2 : 3$ , считая от точки  $A$ . Докажите, что  $MN \parallel BC$  и найдите  $MN$ , если  $BC = 20$ .
- 4°. Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  разделена на три равные части и через точки пересечения проведены прямые, параллельные стороне  $BC$ . Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если  $BC = 12$ .
- 5°. Через точку  $L$  на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, параллельные сторонам  $AB$  и  $AC$  и пересекающие эти стороны соответственно в точках  $K$  и  $M$ . Известно, что  $BL : LC = 1 : 3$ ,  $AB = 12$  и  $AC = 18$ . Найдите стороны четырехугольника  $AKLM$ .
- 6°. Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольники  $AOD$  и  $COB$  подобны и найдите коэффициент подобия, если  $AD = a$  и  $BC = b$ .
- 7°. Точка  $K$  лежит на диагонали  $BD$  параллелограмма  $ABCD$ , причем  $BK : KD = 1 : 4$ . В каком отношении прямая  $AK$  делит сторону  $BC$ ?
- 8°. Сторона  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  разделена на  $n$  равных частей. Первая точка деления  $P$  соединена с вершиной  $B$ . Докажите, что прямая  $BP$  отсекает на диагонали  $AC$  часть  $AQ$ , которая равна  $\frac{1}{n+1}$  всей диагонали.
- 9°. Через середину  $M$  стороны  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ , площадь которого равна 1, и вершину  $A$  проведена прямая, пересекающая диагональ  $BD$  в точке  $O$ . Найдите площадь четырехугольника  $OMCD$ .
- 10°. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей и через третью точку деления (считая от вершины меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ).
- 11°. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на пять равных частей. Пусть  $M$  и  $N$  - вторые точки деления на боковых сторонах, считая от вершин меньшего основания. Найдите  $MN$ , если основания равны  $a$  и  $b$ .
- 12°. Основание треугольника равно 36. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.
- 13°. Через точки, делящие сторону треугольника на три равные части, проведены прямые, параллельные другой стороне треугольника. Найдите площадь четырехугольника, заключенного между этими прямыми, если площадь треугольника равна 24.
- 14°. Точка  $M$  лежит на боковой стороне  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$ , причем  $BM = BC$ . Найдите  $MC$ , если  $BC = 1$  и  $AB = 2$ .
- 15°. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на  $n$  равных частей.
- 16°. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.
- 17°. В равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC = 12$ ,  $AC = 6$ ) вписан ромб  $DECF$  так, что вершина  $E$  лежит на отрезке  $BC$ , вершина  $F$  лежит на отрезке  $AC$  и вершина  $D$  лежит на отрезке  $AB$ . Найдите сторону ромба.
- 18°. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.
- 19°. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.
- 20°. Докажите, что медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  делит пополам любой отрезок с концами на  $AB$  и  $AC$ , параллельный  $BC$ .

- 21°. (Замечательное свойство трапеции.) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.
- 22°. Основания  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно  $a$  и  $b$ . Диагональ  $AC$  разделена на три равные части и через ближайшую к  $A$  точку деления  $M$  проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.
- 23°. На диагоналях  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$ , причем  $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$ . Найдите  $MN$ , если основания  $AD$  и  $BC$  равны соответственно  $a$  и  $b$ .
- 24°. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции разбивается диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равны между собой.
- 25°. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями  $a$  и  $b$  проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.
26. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри трапеции делится бы ее диагоналями на три равные части.
27. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований равны  $a$  и  $b$ .
- 28°. а) Даны отрезки  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Постройте такой отрезок  $x$ , что  $x : a = b : c$ .  
б) Даны отрезки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$ . Постройте отрезок, равный  $\frac{abc}{de}$ .
29. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.
30. Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  равны 12 и 18 и пересекаются в точке  $O$ . Найдите стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $AOD$ .
- 31°.  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольник  $AA_1C$  подобен треугольнику  $BB_1C$ , и треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $A_1B_1C$ .
32. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Найдите  $B_1C_1$ , если  $\angle A = 60^\circ$  и  $BC = 6$ .
33. Пусть  $M$  и  $N$  — проекции вершины  $A$  параллелограмма  $ABCD$  на прямые  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что треугольник  $MAN$  подобен треугольнику  $ABC$ .
- 34°. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны  $S_1$  и  $S_2$ . Найдите площадь трапеции.
35. Точка  $M$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ , причем  $\angle MAB = \angle ACB$ . Найдите  $AM$ , если  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ .
36. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Докажите, что диагонали шестиугольника с вершинами в точках деления, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.
37. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.
- 38°. Площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ . Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника  $ABC$ .
39. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят боковую сторону на отрезки длиной  $m$  и  $n$ , считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.
- 40°. Точки  $K$  и  $M$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , причем  $AK : KB = 3 : 2$ ,  $BM : MC = 3 : 1$ . Через точку  $B$  проведена прямая  $l$ , параллельная  $AC$ . Прямая  $KM$  пересекает  $l$  в точке  $P$ , а прямую  $AC$  в точке  $N$ . Найдите  $BP$  и  $CN$ , если  $AC = a$ .
- 41°. На продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  за точку  $C$  взята точка  $N$  так, что  $CN = AC$ . Точка  $K$  — середина  $AB$ . В каком отношении прямая  $KN$  делит сторону  $BC$ ?
- 42°. Точки  $M$  и  $N$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ , причем  $AM : MB = 1 : 2$ ,  $AN : ND = 3 : 2$ . Отрезки  $DM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите отношения  $DK : KM$ ,  $CK : KN$ .
- 43°. Точки  $K$  и  $E$  лежат соответственно на сторонах  $BC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Отрезки  $AK$  и  $CE$  пересекаются в точке  $M$ . В каком отношении прямая  $BM$  делит сторону  $AC$ , если  $BK : KC = 1 : 2$ ,  $AE : EB = 2 : 3$ ?
44. В треугольник  $ABC$  с периметром, равным 8, вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная стороне  $AB$ . Отрезок касательной, заключенный между сторонами  $AC$  и  $BC$ , равен 1. Найдите  $AB$ .
45. Точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , вершина  $A$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$  лежат на одной окружности. Найдите медиану, проведенную из вершины  $A$ , если  $BC = a$ .