Определение. Угол с вершиной в центре окружности называется *центральным.* Градусная мера дуги равна градусной мере центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Определение. Угол с вершиной на окружности и сторонами, пересекающими окружность называется *вписанным.*

Теорема 1. (о вписанном угле) *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Задачи

1°. Докажите, что равные вписанные углы одной окружности опираются на равные хорды. Верно ли обратное?

2. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая эту дугу в отношении $1 : 2$. Найдите углы треугольника ABM.

3. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что угловые величины меньших дуг AB, BC, CD и DA относятся как $1 : 3 : 5 : 6$. Найдите углы четырехугольника $ABCD$.

4. Точки A, B и C расположены на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке M. Докажите, что треугольник BMC — равнобедренный.

5. Докажите, что трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная.

6°. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна $180°$.

7°. Докажите, что около четырехугольника, сумма противоположных углов которого равна $180°$, можно описать окружность.

8°. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

9°. Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β. Найдите угол между хордами.

10°. Угловые величины дуг, заключенных между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β (считаем, что $\alpha > \beta$). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?

11. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины M, N, K. Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$ или $\angle BMN + \angle NKC = 180°$.

12°. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

13. Три прямые, проходящие через точки O, образуют друг с другом углы в $60°$. Докажите, что проекции произвольной точки, отличной от O, на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

14. Две окружности пересекаются в точках A и B. Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F. Докажите, что прямые CD и EF параллельны.

15. Точки A, B, C, D последовательно лежат на окружности. Точки M, N, K, L — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

16. На одной из сторон острого угла расположен отрезок AB. Рассмотрим всевозможные углы, под которыми отрезок AB виден из точек, лежащих на второй стороне угла. Докажите, что вершина наибольшего из этих углов — это точка касания окружности, проходящей через точки A и B, со второй стороной угла.

17. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а сторон AD и BC — в точке N. Докажите, что биссектрисы углов AMD и DNC взаимно перпендикулярны.

18. Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

19. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

20. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

21. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

22. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B, пересекаются в точке C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

23. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

24°. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

25. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно: $\angle BCD = 80°, \angle ACB = 50°, \angle ABD = 30°$. Найдите $\angle ADB$.

26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно: $\angle ACB = 25°, \angle ACD = 60°, \angle BAD = 95°$. Найдите $\angle ADB$.

27. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

28. Даны четыре окружности, каждая из которых внешним образом касается двух из трех остальных. Докажите, что через точки касания можно провести окружность.

29. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

30. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.

31. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = \alpha$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

32. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

33. A и B — фиксированные точки окружности, C — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения а) биссектрис; б) высот треугольника ABC.

34°. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности этого треугольника.

35°. Пусть O - центр описанной окружности треугольника ABC, AH - высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

36. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, O — центр его описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.

37. Вершины чертежного угольника скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию прямого угла угольника.

38°. В треугольнике ABC, $(AC \neq BC)$ проведена биссектриса угла C. Докажите, что она делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90°$.

39. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

40°. Докажите, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.

41. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD, M — точка пересечения диагоналей, P — проекция M на AD. Докажите, что M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP.

42. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10. Найдите радиус окружности, описанной около исходного треугольника.

43. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ACB равно радиусу описанной окружности этого треугольника. Найдите $\angle ACB$.

44. Из точки A проведены две касательные AP и AQ и секущая AKL (точка K между A и L). Пусть M — середина KL. Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

45. Точки касания вписанного в данный треугольник круга соединены отрезкам и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

46. Три окружности равных радиусов проходят через точку M и попарно пересекаются в трех других точках A, B и C. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности того же радиуса, а M — точка пересечения высот треугольника ABC.

47. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает ее в точках A и B. Через точку A проведена касательная к окружности S_2. Точка D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1. Докажите, что $AD = AB$.

48. *(Задача Архимеда).* В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков $(AM > MB)$. Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам.

Дополнительные задачи

49. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

50. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC втрое больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

51. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (*прямая Симсона).*

52. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AB и CD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.