

Следующие свойства площадей будем считать известными:

- Площадь есть неотрицательная величина.
- Равные фигуры имеют равные площади.
- Если фигура разрезана на две фигуры, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур.
- Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

Определение. Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*.

Задачи

1°. Докажите следующие утверждения:

- а) площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту;
- б) площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту;
- в) площадь ромба равна половине произведения его диагоналей;
- г) площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

2°. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

3. Какую часть площади треугольника отсекает от него средняя линия?

4. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

5. Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника. Известно, что треугольники, прилежащие к двум противоположным сторонам, равновелики. Докажите, что данный четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

6. Докажите, что площадь четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

7. Дан треугольник ABC . Найдите геометрическое место таких точек M , для которых

- а) треугольники AMB и ABC равновелики;
- б) треугольники AMB и AMC равновелики;
- в) треугольники AMB , AMC и BMC равновелики.

8°. Пусть M — точка на стороне AB треугольника ABC , причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника $СAM$ относится к площади треугольника $СBM$ как $m : n$.

9. Площадь трапеции, основания которой относятся как $3 : 2$, равна 35 . Найдите площади треугольников, на которые трапеция разбивается диагональю.

10. На сторонах AB и AC треугольника ABC , площадь которого равна 50 , взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$, а $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK .

11. Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC , а точка K — на стороне AC , причем $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1 . Найдите площадь четырехугольника $AMNK$.

12. Площадь треугольника ABC равна 1 . Точки M и N — середины сторон AB и AC , а точка K лежит на стороне BC . Найдите площадь треугольника KMN .

13. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

14. Прямая, проведенная через вершину C трапеции $ABCD$ параллельно диагонали BD , пересекает продолжение основания AD в точке M . Докажите, что треугольник ACM равновелик трапеции $ABCD$.

15. Основания равнобокой трапеции равны a и b ($a > b$), острый угол равен 45° . Найдите площадь трапеции.

16. Проекция диагонали равнобокой трапеции на ее большее основание равна a , боковая сторона равна b . Найдите площадь трапеции, если угол при ее меньшем основании равен 150° .

17°. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что площади треугольников AMN и ABC относятся как $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$.

18. Сторона треугольника с площадью, равной 1 , разделены в отношении $2 : 1$ по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

19. Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.

20. Докажите, что если диагональ какого-нибудь четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырехугольника.

21. Через точку на диагонали параллелограмма проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Эти прямые разбивают параллелограмм на четыре параллелограмма. Докажите, что параллелограммы, расположенные по разные стороны от указанной диагонали, равновелики. Верно ли обратное, то есть, если для некоторой точки внутри параллелограмма соответствующие параллелограммы равновелики, то эта точка лежит на диагонали параллелограмма?
- 22°. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.
23. Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований, если боковые стороны равны a и b .
24. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.
25. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырехугольника.
26. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны между собой. Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны 8 и 12.
27. На продолжениях сторон AB , BC , CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно за точки B , C , D и A отложены отрезки BB_1 , CC_1 , DD_1 и AA_1 , равные этим сторонам. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна s .
- 28°. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.
- 29°. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон всегда одна и та же.
30. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно a и b . На медиане, проведенной к стороне BC взята точка M . Сумма расстояний от этой точки до прямых AB и AC равна c . Найдите эти расстояния.
- 31°. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.
32. Докажите теорему Пифагора, используя результат предыдущей задачи.
33. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.
34. Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается катетов. Найдите радиус окружности, если катеты равны a и b .
- 35°. Окружность касается стороны треугольника, равной a , и продолжения двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, деленной на разность между полупериметром и стороной a .
36. В параллелограмме соединены середина каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Докажите, что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади исходного параллелограмма.
- 37°. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
38. Произвольный четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найдите площадь данного четырехугольника.
39. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N , O — точка пересечения отрезков BN и CM . Найдите площадь треугольника ABC , если площади треугольников BOM , CON и BOC равны соответственно s_1 , s_2 и s_3 .
40. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше ее основания AD . Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.
41. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PDC равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то стороны BC и AD параллельны.
42. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.
43. Через точку M , лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые PR и QS , параллельные сторонам BC и AD (точки P , Q , R и S лежат на сторонах AB , BC , CD и DA соответственно). Докажите, что прямые BS , PD и MC пересекаются в одной точке.

44. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, площадь которого равна 25, проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ABD , а площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника ADC . Найдите площади треугольников ABC , ABD , ACD и BCD .
45. Точки K и L лежат на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, а точки M и N на стороне AD , причем $BK = KL = LC$ и $AN = NM = MD$. Докажите, что площадь треугольника KNL равна полусумме площадей треугольников ABK и CML .
46. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон четырехугольника на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.
47. Пусть M и N середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P , а DM и CN — в точке Q . Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

48. Дан угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.
49. В квадрате со стороной 1 берут 101 точку (не обязательно только внутри квадрата), причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $0,01$.
50. Найдите геометрическое место точек X , лежащих внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel CD$) или на ее сторонах таких, что площадь треугольника XAB равна площади треугольника XCD .
51. Точки M и N середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, P и Q — точки пересечения прямой MN со сторонами AB и CD . Докажите, что если точка X лежит на отрезке PQ , то сумма площадей треугольников XAB и XCD равна половине площади четырехугольника.
52. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с концами противоположной стороны. Найдите площадь восьмиугольника, образованного пересечениями проведенных отрезков, если площадь параллелограмма равна 1.
53. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площади ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.
54. Перпендикуляры, опущенные из внутренней точки равностороннего треугольника на его стороны и отрезки, соединяющие эту точку с вершинами, разбивают треугольника на 6 прямоугольных треугольников. Докажите, что сумма площадей трех из них, взятых через один, равна сумме площадей трех остальных.
55. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.
56. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилегающих к сторонам треугольника ABC , равна площади четвертого.