

Определение. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) нет.

Определение. Трапеция называется *равнобокой*, если ее боковые стороны равны между собой.

Определение. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции называется *средней линией* трапеции.

ТЕОРЕМА 1. (о средней линии трапеции) *Прямая, содержащая среднюю линию трапеции параллельна основаниям. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.*

Задачи

1. Точка A лежит на одной из двух параллельных прямых, а точка B — на другой. Найдите геометрическое место середин отрезков AB .
- 2°. Докажите следующие утверждения:
 - а) углы при основании равнобокой трапеции равны;
 - б) если углы при одном из оснований трапеции равны, то она равнобокая;
 - в) диагонали равнобокой трапеции равны;
 - г) если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.
3. Докажите, что сумма противоположных углов равнобокой трапеции равна 180° . Верно ли обратное: если сумма противоположных углов трапеции равна 180° , то она равнобокая?
4. Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120° , а большая боковая сторона равна c . Найдите разность оснований трапеции.
- 5°. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на ее большее основание AD . Найдите DP и AP , если $AD = a$ и $BC = b$.
6. Найдите углы и стороны четырехугольника с вершинами в серединах сторон равнобокой трапеции, диагонали которой равны 10 и пересекаются под углом, равным 40° .
7. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.
8. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.
9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30° . Найдите среднюю линию трапеции.
10. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, делит ее большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.
11. Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.
12. В равнобокой трапеции острый угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.
13. Диагональ равнобокой трапеции равна 10 и образует угол, равный 60° , с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.
14. AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = 2.6$ и $BC = 2.5$. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD ?
15. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b . Найдите радиус окружности.
16. Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.
17. Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
- 18°. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.
19. Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания — 5 и 15. Прямая, проведенная через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.
20. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.
21. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
22. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

23. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол, равный 30° , с одним из оснований. Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.
24. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?
25. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P , а при вершинах C и D — в точке Q . Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.
26. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N . Найдите MN , если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$.
- 27°. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.
28. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120° , большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна ее большему основанию.
29. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.
30. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.
- 31°. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.
32. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании равны 30° и 60° . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.
- 33°. Точка M — середина отрезка AB . Точки A_1 , M_1 и B_1 — проекции точек A , B и M на некоторую прямую. Докажите, что M_1 — середина отрезка A_1B_1 .
34. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC опущены перпендикуляры BD и CE . Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E .
35. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K . Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B , а вторая — в различных точках C и D . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K пересекается с этими прямыми в точках M и N . Найдите MN , если $AC = a$, $BD = b$, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой MN .
36. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.
37. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.
38. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.
39. Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.
40. Окружность, построенная на меньшем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины диагоналей и касается большего основания. Найдите углы трапеции.
- * * *
41. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Докажите, что $CE = FA$.
42. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.
43. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.
44. Существует ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?
45. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а также окружность с диаметром AB — в точках M и N . Докажите, что $KM = LN$.