

Определение. *Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

ТЕОРЕМА 1. (Фалеса) *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной из его сторон равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

ТЕОРЕМА 2. (о средней линии треугольника) *Прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна третьей стороне треугольника. Средняя линия треугольника равна половине этой стороны.*

ТЕОРЕМА 3. (о медианах треугольника) *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.*

Задачи

1. Докажите, что средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.
2. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.
- 3°. Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
4. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.
5. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Найдите хорду AC , если $\angle BAC = 30^\circ$.
6. Через точку A пересечения двух окружностей проведены диаметры AB и AC этих окружностей. Найдите BC , если расстояние между центрами окружностей равно a .
7. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, один конец которых лежит на данной прямой, а второй совпадает с данной точкой, не лежащей на этой прямой.
- 8°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC , и медиана, проведенная из вершины A , делят друг друга пополам.
9. Две прямые проходящие через точку C , касаются окружности в точках A и B . Может ли прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC , касаться этой окружности?
10. Сторона треугольника равна a . Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.
11. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.
12. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.
13. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.
14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD .
15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC . Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD .
16. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C . Найдите отрезок PM , если периметр треугольника ABC равен 10.
17. Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC . В каком отношении точка касания делит катет AC ?
18. Точки M и N - середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC .
19. Точки M и N - середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.
20. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащих эту вершину.
21. Докажите, что сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.

22. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , равны 7 и 9, а медиана AM равна 8. Точки P и Q симметричны точке M относительно сторон AC и AB соответственно. Найдите периметр четырехугольника $APMQ$.
23. Постройте треугольник по высотам, проведенным из двух вершин, и медиане, проведенной из третьей.
24. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной его основанию.
25. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на три равные части.
26. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.
27. Постройте треугольник по трем медианам.
28. Докажите признак равенства треугольников по трем медианам.
29. Точки A_1 , B_1 и C_1 - образы произвольной точки O при симметрии относительно середин сторон соответственно BC , AC и AB треугольника ABC . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
30. В четырехугольнике $ABCD$ точка E - середина AB , F - середина CD . Докажите, что середины отрезков AF , CE , BF и DE являются вершинами параллелограмма.
31. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60° . Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой BC , если $AC = 24$, а угол BDC - тупой.
32. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.
- 33°. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Найдите расстояние от точки O до середины AB , если известно, что $CD = a$.
- 34°. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.
35. Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу описанной окружности треугольника ABC .

* * *

36. Точки K , L , M и N - середины сторон соответственно AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q - середины отрезков соответственно KM и LN . Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4}AE$.
37. Постройте треугольник, зная три точки, симметричные центру его описанной окружности относительно сторон.
38. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.
39. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.
40. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C . Пусть M , N и K - середины отрезков BD , AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK - равносторонний.
41. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D - середина стороны AB . Докажите, что $DK = DM$.