

1. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
2. Свойства параллелограмма:
 - углы при соседних вершинах параллелограмма составляют в сумме 180° , а углы при противоположных вершинах равны;
 - диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;
 - противоположные стороны параллелограмма равны;
 - диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
3. Признаки параллелограмма:
 - если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то это параллелограмм;
 - если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то это параллелограмм;
 - если в четырехугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то это параллелограмм;
 - если диагонали четырехугольника делятся точкой их пересечения пополам, то это параллелограмм.
4. Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его *центром*.
5. Параллелограмм, в котором все углы прямые называют *прямоугольником*.
 - Диагонали прямоугольника равны.
 - Если диагонали параллелограмма равны, то это прямоугольник.
6. Параллелограмм, в котором все стороны равны называется *ромбом*.
 - Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.
 - Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то это ромб.
 - Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.
7. Прямоугольник, являющийся одновременно ромбом, называется *квадратом*: у него все стороны равны, а все углы прямые.

Задачи

1. Точки M и N - середины противоположных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.
2. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равно a , проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр, получившегося четырехугольника.
3. Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону на отрезки, равные a и b . Найдите стороны параллелограмма.
4. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 2 и делит его сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен 30° . Найдите меньшую диагональ и углы, которые она образует со сторонами.
- 5°. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.
6. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.
7. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM . Докажите, что $BC_1 = B_1C$.
8. Точки K, L, M и N - середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK — параллелограмм.
9. Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Где расположен ее центр?
10. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Где расположен ее центр?
11. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N , причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.
12. В данный треугольник ABC впишите ромб так, чтобы один из углов ромба совпадал с углом BAC , а вершина противоположного угла лежала на стороне BC .

13. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.
14. Около данной окружности опишите ромб, с данным углом.
15. Вершина M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MN \parallel AC$.
- 16°. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- 17°. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N . Отрезки CM и BN пересекаются в точке P . Докажите, что AP перпендикулярно BC .
18. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на диаметре, ни на окружности).
19. Противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины пересекаются в одной точке.
20. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках M и K , вторая - стороны BC и AD в точках N и L . Докажите, что $MNKL$ - параллелограмм.
- 21°. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делится бы данной точкой пополам.
22. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L , делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.
23. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L , делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN, BK, CL и DM получится параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.
24. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D параллелограмма $ABCD$ на диагональ AC . Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC , проведенные через точки A и C соответственно, пересекутся на прямой DM .
25. Постройте выпуклый четырехугольник по данным серединам трех его равных сторон.
26. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.
27. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30° , а сторона равна 4.
28. Около данной окружности опишите ромб, с данной стороной.
29. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30° . Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.
30. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите большую сторону прямоугольника.
31. Прямая, проходящая через центр прямоугольника, перпендикулярно диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом 60° . Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите большую сторону прямоугольника.
32. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC . Найдите углы параллелограмма.
33. Постройте квадрат по его центру, и двум точкам, лежащим на противоположных сторонах.
34. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.
35. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L , делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ тоже квадрат.

36. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B . Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b . На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D ?
37. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.
38. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A , и делит этот отрезок пополам.
39. Докажите, что биссектрисы всех углов прямоугольника при пересечении образуют квадрат.
40. Стороны параллелограмма равны a и b . Найдите диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис а) внутренних углов параллелограмма; б) внешних углов параллелограмма.
41. Через точку, расположенную внутри треугольника, проведены прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на три треугольника и три четырехугольника. Пусть a , b и c - параллельные высоты трех этих треугольников. Найдите параллельную им высоту исходного треугольника.
42. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.
43. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырехугольника, образованного пересечениями четырех проведенных прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.
44. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры сами образуют квадрат.
45. Три равных окружности проходят через одну точку и попарно пересекаются в трех других точках A , B и C . Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.
46. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 60° . На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N , причем $AM = BN$. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.
47. На прямую, проходящую через вершину A и середину стороны CD параллелограмма $ABCD$ опущен перпендикуляр BH . Докажите, что треугольник BCH равнобедренный.

* * *

48. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше CD , P - проекция вершины C на прямую AB , M - середина стороны AD . Докажите, что $\angle DMP = 3\angle APM$.
49. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $BM = AN$ и $MN \parallel BC$.
50. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все, кроме этих точек, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.
51. Дана линейка с делениями в 1 см. Проведите какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.