

- Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны (*неравенство треугольника*).

- 1°. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего не смежного с ним.
- 2°. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.
- 3°. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.
- 4°. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$. Тогда $BC > B_1C_1$.
- 5°. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC > B_1C_1$. Тогда $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$.
6. Докажите, что катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.
7. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.
8. Сколько можно составить треугольников из отрезков, равных а) 2, 3, 4 и 5 б) 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?
9. В треугольнике две стороны равны 1 и 6. Найдите третью сторону, если известно, что ее длина целая.
10. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.
- 11°. Даны четыре точки A, B, C и D . Докажите, что $AD \leq AB + BC + CD$.
12. Существует ли четырехугольник со сторонами, равными а) 1, 1, 1, 2 б) 1, 2, 3, 6 ?
13. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два неравных угла. Докажите, что катет, прилежащий к меньшему из них, меньше другого катета.
14. Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC , причем $\angle BAD > \angle CAD$. Что больше, AB или AC ?
15. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра.
16. Докажите, что в четырехугольнике любая диагональ меньше половины периметра.
- 17°. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его двух противоположных сторон.
18. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?
19. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше его периметра и больше полупериметра.
20. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с точкой, лежащей на основании, не больше боковой стороны.
21. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K . Докажите, что $BK < 2CK$.
- 22°. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) пересекаются. Докажите, что расстояние между их центрами а) меньше, чем $r + R$; б) больше, чем $R - r$.
- 23°. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 3 равно 8. Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.
24. Докажите, что каждая сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом.
25. Верно ли утверждение предыдущей задачи для четырехугольника, в который можно вписать окружность?
26. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше угол при вершине, тем меньше высота, опущенная на основание.
27. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше основание, тем меньше проведенная к нему высота.
28. Докажите, что из двух неравных хорд окружности большая удалена от центра на меньшее расстояние. Верно ли обратное?
29. Через данную точку внутри круга проведите наименьшую хорду.
- 30°. AM — медиана треугольника ABC ($AB \geq AC$). Докажите, что $\frac{AB-AC}{2} < AM < \frac{AB+AC}{2}$.
31. Внутри треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $\angle BMC$ больше $\angle BAC$.
32. Дан выпуклый n -угольник, все углы которого тупые. Докажите, что сумма его диагоналей больше периметра.
33. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Докажите, что $\angle AKC$ — тупой.
34. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.
35. В треугольнике ABC сторона AC длиннее BC . Медиана CD делит угол C на два угла. Какой из них больше?
36. BD — биссектриса треугольника ABC , причем $AB > BC$. Докажите, что $AD > DC$.
37. BD — биссектриса треугольника ABC , причем $AD > CD$. Докажите, что $AB > BC$.
38. В треугольнике ABC известно, что угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N (M между B и N) так, что лучи AN и AM делят $\angle BAC$ на три равные части. Докажите, что $BM < MN < NC$.

39. В треугольнике ABC известно, что угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Докажите, что $\angle BAM > \angle MAN > \angle NAC$.
40. Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A больше, чем расстояние до точки B .
41. В треугольнике ABC с тупым углом C точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC . Докажите, что отрезок MN короче отрезка AB .
42. Докажите, что если внутри треугольника ABC существует точка D , для которой $AD = AB$, то $AB < AC$.
43. В треугольнике ABC известно, что $AB > BC$ и точка D лежит на стороне AC . Докажите, что $BD < AB$.
44. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.
45. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC , равной b , выбирается точка M . Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM .
46. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $MA + MB \geq CA + CB$.
47. Угол при вершине A треугольника ABC равен 60° . Докажите, что $AB + AC \leq 2BC$.
48. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC . Докажите, что $\angle A$ острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.
49. Точки D и E — середины сторон соответственно AB и BC треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AC , причем $ME > EC$. Докажите, что $MD < AD$.
50. Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C таких, что треугольник ABC — остроугольный причем а) угол C наибольший; б) угол C — средний по величине угол треугольника ABC .
51. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника — тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.
52. Диагональ AC делит диагональ BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пополам. Докажите, что если $AB > AD$, то $BC < DC$.
53. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle D < \angle D_1$.
- 54°. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы сумма $MK + NK$ была наименьшей.
55. Точка M лежит внутри острого угла. Постройте на сторонах этого угла точки A и B , для которых периметр треугольника AMB был бы наименьшим.
56. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l . Постройте на прямой l такую точку P , чтобы разность отрезков MP и NP была наибольшей.
57. Внутри острого угла даны точки M и N . Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.
58. Точка C лежит внутри прямого угла AOB . Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.
59. Пусть вписанная окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках B_1 и A_1 . Докажите, что если $AC > BC$, то $AA_1 > BB_1$.
- 60°. Точка M расположена внутри треугольника ABC . Докажите, что $BM + CM < AB + AC$.
61. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.
62. Даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \geq n$.
63. В треугольнике ABC высота $BD = \frac{1}{2}AC$ и $\angle BAC = 75^\circ$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
64. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) известно, что $\angle A = 20^\circ$. Докажите, что $2BC < AB < 3BC$.
65. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?
66. Есть несколько городов, расстояния между которыми попарно различны. Однажды, из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в соседнем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?
67. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.
68. На плоскости даны n красных и n синих точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.