

- Касательная к окружности. Окружность, вписанная в угол. Построения с помощью циркуля и линейки.*
- 1°. Через точку  $M$  проведены две касательные  $MA$  и  $MB$  к окружности ( $A$  и  $B$  - точки касания). Докажите, что  $MA = MB$ .
  2. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
  - 3°. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
  4. Две прямые касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$ . Найдите угол между этими прямыми, если  $\angle ABO = 40^\circ$ .
  5. Угол при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$ . Окружность касается стороны  $BC$  и продолжений сторон  $AB$  и  $AC$ . Докажите, что расстояние от вершины  $A$  до центра окружности равно периметру треугольника  $ABC$ .
  - 6°. Окружность касается двух параллельных прямых и секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
  7. Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольники  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что отрезок  $O_1O_2$  виден из точки  $D$  под прямым углом.
  8. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.
  - 9°. В прямой угол вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Через некоторую точку на меньшей дуге  $AB$  окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.
  10. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной  $a$ , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
  11. Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  - равнобедренный.
  12. Точка  $A$  лежит вне данной окружности с центром в  $O$ . Окружность с диаметром  $OA$  пересекается с данной в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $AC$  - касательные к данной окружности.
  - 13°. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.
  14. Две прямые, проходящие через точку  $M$ , лежащую вне окружности с центром  $O$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Отрезок  $OM$  делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок  $OM$  делится прямой  $AB$ ?
  15. Точка  $D$  - середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ACD$ , касается отрезка  $CD$  в его середине. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .
  16. Постройте хорду данной окружности равную и параллельную заданному отрезку.
  17. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную  $a$ .
  18. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$ . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную  $a$ .
  19. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанного круга.
  20. Проведите к данной окружности касательную, от которой данная прямая отсекала бы данный отрезок (один конец этого отрезка должен лежать на данной прямой, а второй - на окружности).
  - 21°. Докажите, что если окружность касается всех сторон четырехугольника, то суммы его противоположных сторон равны между собой.
  22. Окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$  и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая  $AM$  делит периметр треугольника пополам.
  23. В равнобедренный треугольник с основанием, равным  $a$ , вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна  $b$ . Найдите боковую сторону данного треугольника.
  24. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  соответственно в точках  $K$ ,  $M$  и  $N$ . Найдите угол  $KMN$ , если  $\angle A = 70^\circ$ .
  25. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  соответственно в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$ . Известно, что  $\angle KLM = \alpha$ . Найдите  $\angle BOC$ .
  - 26°. Пусть  $r$  - радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $r = \frac{a+b-c}{2}$ .
  27.  $CH$  - высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ACH$ ,  $BCH$  и  $ABC$  равна  $CH$ .

- 28°. В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника  $ABC$  равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
29.  $CD$  - медиана треугольника  $ABC$ . Окружности вписанные в треугольники  $ACD$  и  $BCD$  касаются отрезка  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите  $MN$ , если  $AC - BC = 2$ .
30. На основании  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ , причём  $BD - AD = 4$ . Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников  $ACD$  и  $BCD$  касаются отрезка  $CD$ .
- 31°. Окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$ , а продолжения сторон  $AB$  и  $AC$  - в точках  $N$  и  $P$  соответственно. Вписанная окружность этого треугольника касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а стороны  $AB$  в точке  $L$ . Докажите, что а) отрезок  $AN$  равен полупериметру треугольника  $ABC$ ; б)  $BK = CM$ ; в)  $NL = BC$ .
32. В треугольник со сторонами 6, 10, 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
33. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.
34. Прямая, проходящая через центры двух окружностей называется их линией центров. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям пересекаются на линии центров этих окружностей.
- 35°. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.
- 36°. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания окружностей). Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.
37. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.
38. Две окружности касаются друг друга внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?
39. Окружность с центром  $O$  касается в точке  $A$  внутренним образом большей окружности. Из точки  $B$  большей окружности, диаметрально противоположной точке  $A$ , проведена хорда  $BC$  большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке  $M$ . Докажите, что  $OM \parallel AC$ .
40. Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $K$ . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках  $A$  и  $B$  и пересекает их общую касательную, проходящую через точку  $K$  в точке  $M$ . Докажите, что  $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$ .
41. В острый угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен  $r$ . Найдите радиус большей окружности.
42. Две окружности касаются внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен  $60^\circ$ , касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.
- 43°. Две окружности касаются в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает эти окружности вторично в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках  $B$  и  $C$  параллельны.
44. Постройте окружность, касающуюся а) данной прямой и данной окружности в данной на ней точке; б) данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.
45. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно  $a$ . Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности и найдите её радиус.
46. В четырехугольнике  $MNPQ$  расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон  $MN$ ,  $NP$  и  $PQ$ , а другая - сторон  $MN$ ,  $MQ$  и  $PQ$ . Точки  $B$  и  $A$  лежат соответственно на сторонах  $MN$  и  $PQ$ , причём отрезок  $AB$  касается обеих окружностей. Найдите длину стороны  $MQ$ , если  $NP = b$  и периметр четырехугольника  $BAQM$  больше периметра четырехугольника  $ABNP$  на величину  $2p$ .

## Дополнительные задачи.

47. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $BC$  в точке  $M$ . Докажите, что окружности, вписанные в треугольники  $ABM$  и  $ACM$ , касаются отрезка  $AM$  в одной точке.
48. На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $AC_1 = AB_1$ ,  $BA_1 = BC_1$  и  $CA_1 = CB_1$ . Докажите, что  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  - точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.
49. Постройте окружности с центрами в трёх данных точках, попарно касающиеся друг друга внешним образом.
50. Даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.
51. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Докажите, что касательные к этим окружностям в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  пересекаются в одной точке.
- 52°. Суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны между собой. Докажите, что все стороны четырехугольника касаются некоторой окружности.