

Окружность. Диаметр перпендикулярный хорде. Окружность, описанная около треугольника. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. Построения с помощью циркуля и линейки.

1°. Докажите следующие свойства окружности:

- диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам;
- диаметр, проходящий через середину хорды, не являющуюся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
- окружность симметрична относительно каждого своего диаметра;
- дуги окружности, заключенные между равными хордами равны;
- хорды удаленные от центра окружности на равное расстояние равны.

2. Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB а) вдвое меньше AB ; б) вдвое меньше OA .

3. Расстояние между равными параллельными хордами AB и CD равно радиусу окружности. Найдите угол между пересекающимися прямыми AC и BD .

4. Дана окружность с центром в точке O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D - точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

5. Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.

6. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что MO - биссектриса угла между ними.

7. Постройте окружность, на которой стороны данного треугольника высекают три хорды, равные заданному отрезку.

8. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .

9. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

10. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные a и b ($a < b$). Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

11. Рассматриваются все хорды окружности, имеющие заданную длину. Найдите геометрическое место их середин.

12°. Докажите, что центр описанной окружности прямоугольного треугольника - середина гипотенузы.

13°. Найдите геометрическое место точек M , из которых данный отрезок AB виден под прямым углом (т.е. $\angle AMB = 90^\circ$).

14. Найдите центр данной окружности с помощью чертежного угольника.

15°. BM и CN - высоты треугольника ABC . Докажите, что точки B , N , M и C лежат на одной окружности.

16. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности и равные 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

17. Известно, что AB - диаметр окружности, а хорды AC и BD параллельны. Докажите, что $AC = BD$, а CD - также диаметр.

18. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках P и Q . Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A .

19. Две окружности пересекаются в точках A и B , AM и AN - диаметры окружностей. Докажите, что точки M , N и B лежат на одной прямой.

20. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle BAC = 30^\circ$.
21. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
22. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N , отличных от A . Докажите, что $AM = AN$.
23. Найдите внутри треугольника ABC такую точку P , чтобы общие хорды каждой пары окружностей, построенных на отрезках PA , PB и PC как на диаметрах, были равны.
24. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.
25. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC .
26. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы треугольника.
27. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K , отличной от A , а окружность с центром B - в точках M и N . Докажите, что $MK = KN$.
28. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проходящие через другую данную точку.
29. Через данную точку окружности проведите хорду, которая бы делилась данной хордой пополам.
30. Впишите в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходили бы через две данные точки.
31. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу.
32. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.
33. Дан острый угол и две точки внутри него. Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.
34. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.
35. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой, и проходящую через данную на ней точку, проведя не более трёх линий.
36. Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B .
- 37°. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую, часть которой внутри окружностей была бы равна данному отрезку (центры окружностей расположены по разные стороны от общей хорды).
38. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высекают хорды, сумма которых наибольшая (центра окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды).
39. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.
40. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырёхугольник.

Дополнительные задачи.

41. Дана окружность, её диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y , симметричные относительно диаметра AB , для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA .
42. Дана окружность, её центр O и две точки A и B , не лежащие на окружности. Пользуясь только циркулем, постройте точки пересечения окружности с прямой AB .