

Признаки и свойства параллельных прямых. Сумма углов треугольника. Угол между двумя биссектрисами треугольника. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° . Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла.

- 1°. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой.
2. AD - биссектриса треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AB , причём $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.
- 3°. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.
4. Треугольник ABC - равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC . Найдите угол B .
5. Прямая пересекает боковую сторону AC , основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC в точках K , L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML также равнобедренные. Найдите их углы.
- 6°. Два угла треугольника равны 10° и 70° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины третьего угла треугольника.
7. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?
- 8°. Один из углов треугольника равен α . Найдите угол между а) высотами; б) биссектрисами, проведёнными из вершин двух других углов.
- 9°. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы тогда и только тогда, когда он лежит против угла в 30° ; б) Если одна сторона треугольника лежит против угла в 30° и вдвое меньше другой стороны, то треугольник прямоугольный.
10. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведённая из вершины прямого угла.
11. Угол при вершине B равнобедренного треугольника равен 108° . Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D пересекает сторону AC в точке E . Докажите, что $DE = BD$.
- 12°. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник - прямоугольный.
- 13°. Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине C пересекаются в точке M . Найдите $\angle BMC$, если $\angle BAC = 40^\circ$.
14. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведённой к гипотенузе.
- 15°. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
16. Кошка сидит на середине лестницы, прислоненной к стене. Концы лестницы начинают скользить по стене и полу. Какова траектория кошки?
- 17°. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведённого к гипотенузе через её середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.
18. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу равна 1. один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.
19. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 и высоты AA_2 , BB_2 , CC_2 . Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC .
20. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN . Докажите, что $EM + FN = AB$.
21. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P - середина KD . Докажите, что CP перпендикулярна AB .
22. Даны точки A и B . Пользуясь только циркулем, удвойте отрезок AB . То есть, постройте такую точку C , чтобы точки A , B и C лежали на одной прямой и $AC = 2AB$.

23. Какие значения может принимать а) наибольший угол треугольника; б) наименьший угол треугольника; в) средний по величине угол треугольника?
- 24°. Найдите сумму внутренних углов а) четырёхугольника; б) выпуклого пятиугольника; в) выпуклого n -угольника; г) найдите сумму внешних углов при вершинах выпуклого n -угольника.
25. Найдите сумму пяти углов при вершинах пятиконечной звезды.
26. Докажите, что в каждом девятиугольнике есть пара диагоналей, угол между которыми меньше 7° .
27. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются под углом α , продолжения двух других противоположных сторон пересекаются под тем же углом. Докажите, что два угла в четырёхугольнике равны и найдите разность двух других углов.
28. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причём $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK .
29. На одной из сторон данного угла лежит точка A . Постройте на этой же стороне угла точку, равноудалённую от второй стороны угла и от точки A .
30. Постройте треугольник, если заданы сторона, противолежащий её угол и сумма двух других сторон.
31. Постройте треугольник по периметру и двум углам.
32. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.
33. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?
34. Точка K середина стороны AB квадрата $ABCD$, точка L расположена на диагонали AC , причём $AL : LC = 3 : 1$. Найдите угол KLD .
35. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.
36. Высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.
37. В треугольнике ABC угол B равен 20° , угол C равен 40° . Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон $BC - AB$.
38. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.
39. Дан треугольник ABC . Найдите на стороне AC такую точку D , чтобы периметр треугольника ABD равнялся длине стороны BC .

Дополнительные задачи.

40. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = AD$, CA - биссектриса угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .
41. Сторона BC прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB . Точки M и N делят сторону BC на три равные части. Найдите сумму углов AMB , ANB и ACB .
42. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.
43. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .
44. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.
45. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причём $\angle PAB = \angle PBA = 15^\circ$. Докажите, что треугольник DPC равносторонний.
46. В треугольнике ABC с углом B , равным 120° , биссектрисы AE , BD и CM пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle DMO = 30^\circ$.