

1. Пусть r - радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.
2. Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.
3. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
4. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на диаметре, ни на окружности).
5. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делится бы данной точкой пополам.
6. Дана линейка с делениями в 1 см. Проведите какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.
7. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.
8. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.
9. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.
10. Постройте треугольник по трем медианам.
11. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Найдите расстояние от точки O до середины AB , если известно, что $CD = a$.
12. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.
13. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на ее большее основание AD . Найдите DP и AP , если $AD = a$ и $BC = b$.
14. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.
15. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.
16. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.
17. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что площади треугольников AMN и ABC относятся как $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$.
18. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.
19. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.
20. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.
21. Окружность касается стороны треугольника, равной a , и продолжения двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, деленной на разность между полупериметром и стороной a .
22. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
23. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.
24. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .
25. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB , пересекающие вторую окружность в точках P и Q . Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.
26. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , $\angle AOC = \alpha$. Найдите угол AMC , где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .
27. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности этого треугольника.
28. Пусть O - центр описанной окружности треугольника ABC , AH - высота. Докажите, что $\angle BAN = \angle OAC$.

29. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , O — центр его описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.
30. В треугольнике ABC , ($AC \neq BC$) проведена биссектриса угла C . Докажите, что она делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.
31. Докажите, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.
32. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).
33. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.
34. (*Замечательное свойство трапеции.*) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.
35. а) Даны отрезки a , b и c . Постройте такой отрезок x , что $x : a = b : c$.
б) Даны отрезки a , b , c , d и e . Постройте отрезок, равный $\frac{abc}{de}$.
36. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.
37. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C , и треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C .
38. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят боковую сторону на отрезки длиной m и n , считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.
39. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найдите в каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла C ?
40. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.
41. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.
42. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.
43. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот H с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), причём центром этой окружности является середина отрезка OH , где O — центр описанной окружности.
44. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трём высотам.
45. (*Теорема Птолемея*) Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению его диагоналей.
46. Окружности радиусов r и R ($R > r$) касаются внешним образом в точке K . Точки A , D и B , C — точки касания их общих внешних касательных с меньшей и большей окружностью соответственно;
а) найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключённый между внешними касательными;
б) докажите, что углы AKB и O_1MO_2 — прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей);
в) найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.
47. Найдите радиусы вписанной и невписанных окружностей треугольника со сторонами а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.
48. Найдите геометрическое место точек M , разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.
49. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны между собой.
50. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
51. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.
52. Стороны треугольника равны a , b , c . Найдите медиану, проведённую к стороне, равной c .
53. Дан треугольник ABC и точка M . Известно, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

54. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC , причём $BD : DC = m : n$. Выразите вектор \overline{AD} через векторы \overline{AB} и \overline{AC} .
55. Точка M лежит на окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$, а точка N — на прямой $4y = 3x + 36$. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N .
56. Высоты треугольника пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , ABH , ACH , BCH , равны между собой.
57. (*Теорема Монжа*) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
58. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.