Вспомним, как мы до этого определяли степень числа.

Целая степень.

Пусть a — произвольное число, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$a^k = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}, \text{ если } k > 0;$$

$$\text{при } a \neq 0, a^0 = 1, a^k = \frac{1}{a^{-k}}, \text{ где } k < 0.$$

Рациональная степень.

Пусть даны числа a и $q \in \mathbb{Q}$, где $a > 0$, $q = \frac{m}{n}$. *Рациональной степенью q числа a* называется число $b = a^q$ такое, что $b > 0$ и $b^n = a^m$. По другому, $b = \sqrt[n]{a^m}$. Можно проверить следующие свойства степени:

Свойства степени.

При всех $a, b > 0$, $q \in \mathbb{Q}$ выполнены следующие свойства:

1. $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$;
2. $a^{p-q} = \dfrac{a^p}{a^q}$;
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;
4. $(ab)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;
5. $(a^p)^q = a^{pq}$;
6. Если $m > n$, $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

Задачи.

1. Проверьте все свойства степени.

2. Сравните числа:

а) $0,8^{0,4}$ и $0,8^{0,5}$; **б)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{4,3}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{4,4}$; **в)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; **г)** $0,02^{-3,2}$ и $0,02^{-3,3}$; **д)** $\pi^{-1,2}$ и $\pi^{-1,3}$.

3. Решите уравнения.

а) $2^x = 512$; **б)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; **в)** $\left(\sqrt{5}\right)^x = \frac{1}{125}$; **г)** $(0,5)^{x+1} = 256$;
д) $4^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; **е)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3} = \frac{81}{16}$; **ж)** $\left(\sqrt{27}\right)^x = 0,(3)$; **з)** $2^x = 5$;
и) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$.

4. Решите неравенства.

а) $3^x < 243$; **б)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqslant 4$; **в)** $(0,25)^x > 2\sqrt{2}$; **г)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{x+1} < 12\frac{1}{4}$;
д) $(0,(6))^x \geqslant 2\frac{1}{4}$; **е)** $3^x \geqslant -\frac{1}{3}$; **ж)** $6^{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{36}$; **з)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$;
и) $\left(\sqrt{2}\right)^x < 1$; **к)** $7^x > 2$; **л)** $-1 \leqslant 2^x \leqslant 1$; **м)** $-3 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 9$.

5. Решите уравнения.

а) $3^{x-2} + 2 \cdot 3^{x-1} + 3^x = 16$; **б)** $5^{x-1} - 3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 11$; **в)** $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$;
г) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$; **д)** $7^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0$; **е)** $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$;
ж) $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$; **з)** $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$; **и)** $5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24$;
к) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$; **л)** $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; **м)** $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0$.

6. Решите неравенства.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2x-1}} > 1$; **б)** $4^x - 2^x \leqslant 2$; **в)** $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 > 0$; **г)** $2^{4x+1} + 3 \cdot 4^x - 2 > 0$;
д) $0,8^x - 1,25^{x+1} > 0,25$; **е)** $0,5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$; **ж)** $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$; **з)** $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$;
и) $5^{2\sqrt{x}} + 5 > 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$; **к)** $0,2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$; **л)** $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leqslant 0$;
м) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot 12,25^{\frac{4x+1}{2}} \geqslant 1$; **н)** $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$; **о)** $0,64 < \sqrt{0,8^{x(x-3)}} < 1$;
п) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; **р)** $\sqrt{4^{x+1} + 17} - 5 > 2^x$; **с)** $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$;
т) $\frac{4^x+2x-4}{x-1} \leqslant 2$; **у)** $\frac{2^x+x-10}{2^x-8} \leqslant 1$; **ф)** $98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}$;
х) $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{1-x} \leqslant \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{\frac{2x+1}{x+3}}$; **ц)** $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$;
ч) $3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leqslant 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}$; **ш)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1$.