Формулы для суммы и разности тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z};\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi k, k\in\mathbb{Z};\quad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}, \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Теоремы сложения.

1. Вычислите:

а) $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0,5$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; **б)** $\cos(\frac{\pi}{6}+\beta)$, если $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;
в) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}+\alpha)$, если $\cos\alpha=0,6$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; **г)** $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}-\beta)$, если $\sin\beta=-0,8$ и $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$;
д) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{2}{3}$, и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;
е) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=-\frac{1}{5}$, и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}+\cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24}+\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}}$; **б)** $\dfrac{\sin\frac{15\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}\cos\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{7\pi}{24}\sin\frac{23\pi}{24}}$; **в)** $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{24}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{24}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}$;
г) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{24}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}-1}{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{24}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}$.

3. Найдите:

а) $\cos\beta$, если $\cos\alpha=0,6$, $\cos(\alpha+\beta)=0$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.
б) $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=0,5$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.
в) $\alpha-\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a\sqrt{3}}{4-a}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{a-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;
г) $\alpha+\beta+\gamma$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$.

4. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$; **б)** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$; **в)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; **г)** $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$;
д) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; **е)** $\frac{1+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-1}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$; **ж)** $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$;
з) $\operatorname{ctg}\beta+\sin 2\beta-\cos 2\beta=1$.

5. Упростите выражение:

а) $\sin^2(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-\alpha)+\sin^2\alpha$; **б)** $\cos^2\beta+\cos^2(\frac{2\pi}{3}-\beta)+\cos^2(\frac{2\pi}{3}+\beta)$;
в) $\cos(\alpha-\beta)(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1)+(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\cos(\alpha+\beta)$; **г)** $\cos(\alpha+\beta)(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1)+(1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
д) $\frac{\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta$; **е)** $\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

6. Докажите, что:

а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$. **б)** $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Формулы двойного и половинного аргумента.

7. Докажите, что:

а) $\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$; **б)** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; **в)** $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;
г) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$; **д)** $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$; $k,m\in\mathbb{Z}$;
е) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; **ж)** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

8. Докажите, что при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$:

а) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **б)** $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **в)** $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

9. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha,\cos 2\alpha,\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$; **б)** $\sin 2\beta,\cos 2\beta,\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{2}{3}$;
в) $\frac{\cos\alpha}{2-3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$; **г)** $\frac{2\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-2$; **д)** $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-3$;
е) $\cos 4\beta$, если $\operatorname{tg}\beta=2$; **ж)** $\sin 3\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$; **з)** $\cos 3\beta$, если $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=0,5$.

10. Вычислите:

а) $8\sin^2\frac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{17\pi}{16}-1$; **б)** $\sin^4\frac{23\pi}{12}-\cos^2\frac{13\pi}{12}$; **в)** $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$;
г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}$; **д)** $\sin^2\frac{\pi}{13}+\sin^2\frac{11\pi}{26}$; **е)** $\cos^2\frac{3\pi}{34}+\cos^2\frac{7\pi}{17}$.