

Чтобы избавиться от иррациональности в уравнении, достаточно запомнить следующие два преобразования.

Если дано неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$, то надо проверить неотрицательность $f(x)$ и $g(x)$ и возвести неравенство в квадрат:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

В случае неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ надо рассмотреть два случая: $g(x) \geq 0$ и $g(x) < 0$. Во втором неравенство верно всегда, когда $f(x) \geq 0$. В первом надо возвести искомое неравенство в квадрат (условие $f(x) \geq 0$ будет выполнено автоматически):

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} > g(x), \\ g(x) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Задачи.

1. Решите неравенства.

а) $\sqrt{x-2} < 3$;

б) $\sqrt{2x+1} \geq 2$;

в) $\sqrt{3x-5} \geq -1$;

г) $\sqrt{4x-1} < -2$;

д) $\sqrt{x^2-10x+16} < 4$;

е) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1}$;

ж) $\sqrt{(x-3)(x-12)} > 6$;

з) $\sqrt{x^4-2x^2-8} > -\frac{1}{2}$;

и) $\sqrt{\frac{3x-2}{x+2}} \leq 2$;

к) $\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}} \leq 2$;

л) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$.

2.

а) $\sqrt{x} \leq x-2$;

б) $\sqrt{x} > x-1$;

в) $\sqrt{x+3} > x+1$;

г) $\sqrt{x+14} < x+2$;

д) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$;

е) $\sqrt{x^2-x-6} \leq x+1$;

ж) $\sqrt{2x^2-6x+4} < x+2$;

з) $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$;

и) $\frac{\sqrt{5+x}}{1-x} < 1$;

к) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$;

л) $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\frac{1}{3}$.

3.

а) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$;

б) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$;

в) $(3x^2-2x-1)\sqrt{x-5} \geq 0$.

4.

а) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5}$; б) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} > \sqrt{1-x}$; в) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

5.

а) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} < 3$;

б) $\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x} \geq 1$.

6.

а) $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$;

б) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < 4$;

в) $\sqrt{x^2-3x-28} < 10+3x-x^2$;

г) $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 2+x^2-5x$.

7.

а) $7+2x \geq 2\sqrt{x^2+9x} + \sqrt{x} - \sqrt{x+9}$;

б) $\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-4} + \sqrt{(x+5)(-x-4)}$.