

Мы познакомились с методом решения систем линейных уравнений. Перейдём теперь к системам уравнений более общего вида. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1°. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ (2 + y)^2 + y + 2 + y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 4 + 4y + y^2 + y + 2 + y = 1. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ y^2 + 6y + 5 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ \begin{cases} y = -1, \\ y = -5. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 1; \\ y = -5, \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ : $(1; -1), (-3; -5)$.

Пример 2°. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 - y^2 = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 - y^2 = 16. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4, \\ (x - y)(x + y) = 16. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases} \\ \text{Ответ : } &(4; 0). \end{aligned}$$

Пример 3°. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ xy = 5. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{y}\right)^2 + y^2 = 26, \\ x = \frac{5}{y}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 + y^4 = 26y^2, \\ x = \frac{5}{y}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 26y^2 + 25 = 0, \\ x = \frac{5}{y}. \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y^2 = 25, \\ y^2 = 1; \end{cases} \\ x = \frac{5}{y}. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = \pm 5, \\ x = \pm 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm 1, \\ x = \pm 5. \end{cases} \end{cases} \\ \text{Ответ : } &(1; 5), (-1; -5), (5; 1), (-5; -1). \end{aligned}$$

Пример 4°. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + xy + y = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$$

Эта система уравнений симметрична относительно x и y (то есть не меняется при замене x на y и y на x). Удобно сделать следующие замены: $u = x + y, v = xy$.

Решение.

Замена: $u = x + y$, $v = xy$. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Получаем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u + v = 7, \\ (u^2 - 2v) + v = 13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 - v = 13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - u, \\ u^2 - (7 - u) - 13 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - u, \\ u^2 + u - 20 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v = 7 - u, \\ \begin{cases} u = -5, \\ u = 4. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -5, \\ v = 12; \\ u = 4, \\ v = 3. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x + xy + y = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 12; \\ x + y = 4, \\ xy = 3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ : (1; 3).

Пример 5°. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4. \end{cases}$

Первое из уравнений системы уравнений является однородным степени 2 (имеется ввиду, что степени всех одночленов равны 2). Это означает, что многочлен, стоящий в левой части можно попытаться разложить на множители, решив соответствующее квадратное уравнение.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } x^2 + xy - 6y^2 = 0 & \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -3, \\ \frac{x}{y} = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y, \\ x = 2y. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4. \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3y, \\ x = 2y. \end{cases} \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3y, \\ (-3y)^2 - 5(-3y)y + 2y^2 = -4; \\ x = 2y, \\ (2y)^2 - 5(2y)y + 2y^2 = -4. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3y, \\ 26y^2 = -4; \\ x = 2y, \\ -4y^2 = -4. \end{cases} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \\ x = -2, \\ y = -1. \end{cases} \end{cases} \\ \text{Ответ : } (2; 1), (-2; -1). & \end{aligned}$$

Задачи.

1. Решите систему уравнений.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x(y+1) = 16, \\ \frac{x}{y+1} = 4. \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x+y = 4, \\ x^2+y^2 = 8. \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x^2+y^2 = 13, \\ y = x^2-7. \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} x+y = 6, \\ x^2-y^2 = 12. \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x-y = 3, \\ x^3-y^3 = 9. \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} x^2+y^2 = 5, \\ x^4-y^4 = 15. \end{cases} \\ \text{ж)} \begin{cases} x+y = 3a, \\ xy = 2a^2. \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} x^2+y^2 = 5a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases} & \text{и)} \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{a}, \\ xy = -a^2. \end{cases} \end{array}$$

2. Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 3y = 1, \\ x^4 + 4y = 12. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 - 6y = -14, \\ y^2 - 4x = 1. \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - y + x = 0, \\ x^2 + y^2 + xy + y + 2x = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 12x^2 + 2y^2 - 6x + 5y = 3, \\ 18x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 7. \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + y = 5xy, \\ x - y = xy. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 9y^2 + 6xy - 4x - 9y + 2 = 0, \\ 27y^2 + 3xy - 2x - 42y + 16 = 0. \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} x^3 + 2x^2y + xy^2 - x - y = 2, \\ y^3 + 2xy^2 + x^2y + x + y = 6. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} (x + y)xy = 6, \\ (x - y)xy = 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} xy - x = 2, \\ xy^3 - xy^2 = 8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + xy^3 = 9, \\ xy + xy^2 = 6. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x^4 = 3x^2y + 20, \\ 3y^2 = 2x^2y - 5. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = 92, \\ xy = 3. \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - xy + y = 1, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x^8 + y^8 + x^4 + y^4 = 274, \\ xy = 2. \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} (x + y + 1)^2 - x - y = 31, \\ xy = 6. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 2, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0, \\ x|y| - y|x| = 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + 3xy = 4, \\ 4y^2 + xy = 5. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x^2 - 2xy = 2x - 3y, \\ y^2 - 3xy = 4x - 6y. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{x^2 + xy} + \frac{4}{y^2 + xy} = \frac{13}{6}, \\ \frac{8}{x^2 + xy} - \frac{1}{y^2 + xy} = 1. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2}{y^2 - xy} = 1, \\ x^3 - y^3 = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x + 2y}{x - y} + \frac{x - 2y}{x + y} = 4, \\ x^2 + xy + y^2 = 21. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{3}{2x - y} + \frac{2}{x + y} = \frac{4}{x}, \\ x^2 + 2y^2 = 72. \end{cases}$$

7. Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = -1, \\ xz = -3. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + y + 2z = -6, \\ x + 2y + z = -5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} xy + yz = 9, \\ yz + xz = 8, \\ xy + xz = 5. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} z - y = 3, \\ z - x = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} xy = 2, \\ xz = -3, \\ yz = -6. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x + y = 2, \\ xy + yz + xz = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$