

Система уравнений - это совокупность нескольких уравнений от одной или большего количества переменных. *Решить систему уравнений* значит найти все значения переменных, которые удовлетворяют данной системе (то есть при подстановке получается верное равенство) или доказать, что решений нет.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если множества решений этих уравнений совпадают. Известны следующие равносильные преобразования системы:

- Любое из уравнений системы можно поменять на равносильное.

$$\text{Пример: } \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases}$$

- (подстановка) Если в одном из уравнений мы выразили одну из переменных (например, x) через остальные, то мы можем подставить вместо x его выражение в остальные уравнения.

$$\text{Пример: } \begin{cases} x = 2 + y, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ (2 + y)^2 + y + (2 + y) = 1. \end{cases}$$

- (метод алгебраического сложения) К одному из уравнений можно прибавить другое, умноженное на коэффициент.

$$\text{Пример: } \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y + x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y + x + (x - y) = 1 + 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + 2x = 3. \end{cases}$$

Самые простые системы уравнений — это линейные системы (то есть переменные в этих уравнениях встречаются с числами (линейными коэффициентами)). Прежде всего нас интересует система из двух уравнений с двумя неизвестными. Напомним, как решаются эти уравнения при помощи методов подстановки и алгебраического сложения.

Пример 1°. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Решение. Выразим y из второго уравнения ($y = 3x - 5$) и подставим в первое. Получим линейное уравнение с одним неизвестным:

$$2x - 2(3x - 5) = 2 \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Тогда $y = 3x - 5 = 6 - 5 = 1$.

Решение будем записывать в таком виде:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 2y = 2, \\ 3x - y = 5. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2, \\ y = 3x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2(3x - 5) = 2, \\ y = 3x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x = -8, \\ y = 3x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = 2, y = 1$.

Пример 2°. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 4x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Умножим обе части уравнения на -3 и результат сложим почленно с первым уравнением. Получим линейное уравнение с одним неизвестным: $-7x = -14 \Leftrightarrow x = 2$.

Подставим найденное значение x в любое из уравнений исходной системы (здесь лучше во второе), найдём $y = -3$.

Решение записывается так:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 4x + y = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ -12x - 3y = -15. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = -14, \\ y = -4x + 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2, y = -3$.

Задачи.

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 5y = 8, \\ -3x + y = -2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}y = 2. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 1, \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 4, 5. \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{6}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 7, \\ \frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{3}{2x+y} + \frac{7}{x-y} = 1, 9, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{2}{2x+y} = 1, 15. \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 - 2\sqrt{5}, \\ 2y - \frac{6x}{\sqrt{5}} = 2. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} y - x = 1, \\ x + |y| = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3|x| + 2y = 1, \\ 2|x| - y = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2|y| = 3, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x - 1| + |y - 2| = 1, \\ y + |x + 1| = 3. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y + z = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6, \\ x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 5y + 2z = -7. \end{cases}$

4. Сколько решений может иметь линейная система из двух уравнений с двумя неизвестными?

5. Решите систему n уравнений с n неизвестными x_1, \dots, x_n

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n},$$

$$x_1 + \dots + x_n = a.$$

6. Найдите все значения параметра a , при которых система:

а) $\begin{cases} 3x + 7y = 20, \\ ax + 14y = 15. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (a - 1)x - y = a, \\ (a - 3)x + ay = -9. \end{cases}$

имеет единственное решение.

7. Найдите все значения параметра b , при которых система:

а) $\begin{cases} bx - 8y = 12, \\ 2x - 6y = 15. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (b + 1)x + y = 3, \\ 2x - (b - 2)y = 6. \end{cases}$

не имеет решений.

8. Найдите все значения параметра c , при которых система:

а) $\begin{cases} 15x + cy = 3, \\ 5x + 10y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - (c - 1)y = 2, \\ (c + 2)x + 2y = 4 - c^2. \end{cases}$

имеет бесконечно много решений.