

Дробно-линейной функцией называется функция вида $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Если $c = 0$, то мы получаем обычную линейную функцию $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$.

Пусть $c \neq 0$. Простейшей функцией такого вида является гипербола $y = \frac{1}{x}$.

Свойства графика $y = \frac{1}{x}$:

Область определения $-\infty < x < 0 \cup 0 < x < +\infty$;

область значений $-\infty < y < 0 \cup 0 < y < +\infty$;

промежутки возрастания/убывания: убывает на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

чётность/нечётность: функция нечётна.

График функции $f(x) = \frac{1}{x}$ при x , близких к 0 "прижимается" к оси ординат, при очень больших x "примыкает" к оси абсцисс. Эти прямые называются *асимптотами* функции $f(x)$.

1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Нарисуйте графики функций:

- а) $f(x)$; б) $f(x) - 2$; в) $f(x - 2)$; г) $f(2x)$; д) $2f(x)$;
 е) $f(-x)$; ж) $-f(x)$; з) $f(|x|)$; и) $|f(x)|$; к) $|f(|x|)|$.

Пользуясь линейными сдвигами, мы можем построить графики функций $\frac{a}{x}$, $a + \frac{b}{x}$, $\frac{1}{x+d}$. А

значит, и график дробно-линейной функции $\frac{ax + b}{cx + d}$.

2. Нарисуйте график функции

- а) $y = \frac{5}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$; в) $y = -\frac{2}{x} + 1$; г) $y = \frac{3}{x} - 2$;
 д) $y = \frac{1+2x}{x}$; е) $y = -\frac{2-3x}{x}$; ж) $y = \frac{1+x}{1-x}$; з) $y = -\frac{3x+2}{x+2}$.

3. Какие асимптоты у дробно-линейной функции $\frac{ax + b}{cx + d}$?

4. Постройте график функции

- а) $y = \frac{|x|}{x-1}$; б) $y = \left| \frac{x}{x-1} \right|$;
 в) $y = \frac{|x|}{|x|-1}$; г) $y = \frac{x}{|x-1|}$.

5. Постройте график функции

- а) $y = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$; б) $y = \frac{\frac{x-2}{x} + \frac{x-2}{x+1}}{\frac{x-2}{x} - \frac{x-2}{x+1}}$.