Часть 7. Рациональные и квадратичные неравенства. 15.04.2010

Обозначения для подмножеств прямой действительных чисел $\mathbb{R}$.

В каждой строчке вначале указан знак для данного подмножества, потом его описание ($\{,\}$ — обозначения для элементов множества; «$\in$» означает «принадлежит»; «$|$»— таких, что). Например, ниже в соответствующей строке написано, что отрезок $[a, b]$ — это все числа x, принадлежащие $\mathbb{R}$, такие, что x больше или равно a и меньше или равно b.

В определениях ниже полагается, что $a < b$.

$\varnothing$ — пустое множество.

$\{a\}$ — точка a.

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (все числа, заключённые между a и b, включая a и b);

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$; $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ — полуинтервал (все числа, заключённые между a и b, не включая один из концов отрезка $[a; b]$);

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — интервал (все числа, заключённые между a и b, не включая a и b);

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$ — открытый луч (все числа, меньшие b);

$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$ — открытый луч (все числа, большие a);

$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$ — вся прямая.

Определение 1. *Решением неравенства* называется множество точек на прямой, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ записывается в виде одного или объединения (значок $\cup$) нескольких указанных выше множеств. Например, решением неравенства $(x-1)^2(x-2)^2 \leqslant 0$ являются две точки 1, 2. Соответственно, ответ надо записывать так: $\{1\} \cup \{2\}$ или $x = 1, 2$.

Задачи.

Решите неравенства:

1.

а) $\dfrac{3}{2x-1} > 0$; **б)** $\dfrac{-4}{3x-7} > 0$; **в)** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{4-3x} \leqslant 0$.

2.

а) $(x-a)(x-b) < 0$; **б)** $(x-a)(x-b) > 0$,

где $a < b$ — параметры.

3.

а) $(5x-2)(4x+3) \leqslant 0$; **б)** $(6x-5)(8x+1) > 0$; **в)** $x^2 - 5x > 0$;

г) $x^2 - 8x + 7 \geqslant 0$; **д)** $4x - 3x^2 \leqslant 0$; **е)** $x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$;

ж) $3x^2 + 5x - 8 < 0$; **з)** $2x^2 - 3x + 5 > 0$; **и)** $3x^2 - 4x + 2 \geqslant 0$;

к) $x^2 - 10x + 27 < 0$; **л)** $5x^2 - 12x + 8 \leqslant 0$; **м)** $9x^2 + 12x + 4 \leqslant 0$;

4.

а) $\dfrac{3-2x}{2x+5} < 0$; **б)** $\dfrac{5-7x}{x-1} \geqslant 0$; **в)** $\dfrac{1}{x} < 1$; **г)** $\dfrac{3x-1}{2x+5} > 3$;

д) $\dfrac{2x-1}{3x+5} \leqslant -2$: **е)** $\dfrac{7x+4}{3-2x} \geqslant 2$; **ж)** $\dfrac{5-6x}{3x+4} < 1$.

5.

а) $(x-a)^n < 0$; **б)** $(x-a)^n > 0$,

где a — произвольное число, n — натуральная степень.

6.

а) $\dfrac{(x^2-9)(1-x)}{x^2+2x+1} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{x^2+x-6}{(9-x)^3} \leqslant 0$; **в)** $\dfrac{x^2+6x+9}{5+4x-x^2} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{x^2+8x+7}{4x^2+4x+1} < 0$; **д)** $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)} > 0$; **е)** $\dfrac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)} < 0$;

7.

а) $3-x \geqslant \dfrac{1}{2-x}$; **б)** $\dfrac{8-x}{x-10} \leqslant \dfrac{2}{2-x}$; **в)** $\dfrac{2x-3}{4x-1} \geqslant \dfrac{x-2}{x+2}$;

г) $\dfrac{x+1}{1-x} + \dfrac{x-1}{x} < 2$; **д)** $\dfrac{5-2x}{3x^2-2x-16} < 1$; **е)** $\dfrac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4$.

8.

а) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x+2}$; **б)** $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x} \geqslant \dfrac{3}{x-1}$;

в) $\dfrac{6}{x-1} \leqslant \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2}$; **г)** $\dfrac{21}{x+1} < \dfrac{16}{x-2} - \dfrac{6}{x}$.