Часть 6. Многочлены. 31.03.2010

Многочленом от одной переменной называется выражение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где a_n, a_{n-1}, …, a_0 — коэффициенты многочлена (то есть обычные числа), x — переменная.

Многочлены можно складывать и перемножать по обычному правилу раскрытия скобок.

1. Вычислите произведение многочленов:
а) $(x+2)(x+3)$; **б)** $(x^2+2x+3)(2x^2-3x+4)$; **в)** $(y^4+1)(y^2-1)$;
г) $(a^4+a+1)(a^2-1)$; **д)** $(b^3+b^2+b+1)(b-1)$.

Степенью многочлена f называется наибольший номер ненулевого коэффициента и обозначается deg. Например, $\deg(x+1)=1$.

2. Найдите степень многочлена
а) x^3+1; **б)** $(x^4+2x+1)(x^2+1)$; **в)** $(x+1)^n$.

3. Выразите степень суммы и произведения многочленов f и g через $\deg f$ и $\deg g$.

Многочлен f делится на многочлен g ($f \vdots g$) если найдётся многочлен h такой, что $f = gh$. g называется *делителем* многочлена f.

4. Проверить, выполнены ли следующие утверждения:
а) $x^2+5x+4 \vdots x+1$; **б)** $x^3-15x^2+10x+4 \vdots x-1$; **в)** $x^4+1 \vdots x^2-x+1$.

Многочлен f с $\deg f \geqslant 1$ называется *неприводимым,* если не существует делителей f степени меньше, чем $\deg f$. Разложить многочлен на множители значит представить его в виде произведения неприводимых многочленов.

5. Разложить многочлен на множители:
а) $x+2$; **б)** x^2+3x+2; **в)** x^2-2x+4; **г)** x^3+27.

Число a называется *корнем* многочлена f, если $f(a)=0$.

Теорема 1. (Безу) *Число a — корень многочлена f если и только если f делится на $x-a$.*

6. Разложить на множители:
а) x^2+5x+3; **б)** x^3-7x+6; **в)** x^3+4x^2+2x-1.
г) $(x^2+3x+3)^3-3(x^2+3x+3)^2+x^2+3x+4$.

Разделить многочлен f на многочлен g с остатком значит найти такие многочлены q (частное) и r(остаток), что $f = gq + r$, $\deg r < \deg g$ или $r = 0$.

7. Разделить многочлен f на многочлен g с остатком (используя деление в столбик):
а) $f=x+1$, $g=x+2$; **б)** $f=x^2+3x+1$, $g=x-1$; **в)** $f=2x^3-2x^2+1$, $g=x+3$;
г) $f=x^3-3x^2-x-1$, $g=3x^2-2x+1$.