

Нам уже известны свойства и график функции $y = x^2$. Рассмотрим теперь произвольной квадратный трёхчлен, т.е. функцию вида

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

Если $b = c = 0$, то функция имеет вид $y = ax^2$. График этой функции получается умножением ординаты каждой точки известного графика функции $y = x^2$ на a . В результате мы также получим линию, называемую параболой, причём, если $a > 0$, то "ветви" этой параболы направлены вверх, если же $a < 0$ — то вниз.

Пример 1°. График функции $y = 2x^2$ получается из параболы $y = x^2$ "растяжением" вдоль оси ординат в 2 раза, или "сжатием" вдоль оси абсцисс в $\sqrt{2}$ раз. График функции $y = -2x^2$ — образ параболы $y = 2x^2$ при симметрии относительно оси абсцисс.

Ранее было установлено, что с помощью выделения полного квадрата любой квадратный трёхчлен можно представить в виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - d)^2 + e,$$

поэтому его график можно получить с помощью параллельного переноса параболы $y = ax^2$. Координаты вершины новой параболы — $(d; e)$. Например, если $d > 0$ и $e > 0$, то парабола $y = ax^2$ смещается на d единиц вправо и на e единиц вверх.

Пример 2°. Постройте график квадратного трёхчлена $y = -2x^2 + 8x - 5$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 8x - 5 = -2(x^2 - 4x) - 5 = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5 = -2(x - 2)^2 + 8 - 5 = -2(x - 2)^2 + 3.$$

График функции $y = -2(x - 2)^2 + 3$ — парабола, полученная из параболы $y = 2x^2$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс, затем параллельного переноса на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и, наконец, параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси ординат.

Итак, график квадратного трёхчлена — парабола. Абсцисса вершины этой параболы — $x_B = -\frac{b}{2a}$. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ — вниз. ■

Если дискриминант квадратного трёхчлена положителен, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках (абсциссы этих точек — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$), если меньше нуля — то не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, если равен нулю — парабола имеет с осью абсцисс ровно одну общую точку (в этом случае говорят, что парабола касается оси абсцисс). В последнем случае квадратный трёхчлен представляет собой полный квадрат, т.е. $y = a(x - d)^2$.

Задачи.

1. Постройте графики следующих функций.

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| а) $y = \frac{1}{2}x^2$; | б) $y = 3x^2 + 1$; | в) $y = 9 - x^2$; |
| г) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$; | д) $y = (x + 1)^2$; | е) $y = 3(x - 2)^2$; |
| ж) $y = -(x + 2)^2 + 1$; | з) $y = \frac{1}{2}(4 - x)^2 - 3$; | и) $y = -(x + 3)^2 - 2$; |
| к) $y = -4x^2 + 4x + 1$; | л) $y = x^2 - 6x + 11$; | м) $y = x^2 + 2x - 3$; |
| н) $y = x^2 + x$; | о) $y = -x^2 + 8x - 10$; | п) $y = 2x^2 - 4x + 1$; |
| р) $y = 3x^2 + 6x - 2$. | | |

2. Постройте графики следующих функций.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| а) $y = x^2 - 2 x $; | б) $y = x^2 - 2x $; | в) $y = x^2 - 2 x $; |
| г) $y = (x + 2)(x - 5) $; | д) $y = x^2 - 2 x - 8$; | е) $y = x^2 - 2x - 8 $; |
| ж) $y = x^2 - 2 x - 8 $; | з) $y = (x - 2) x $; | и) $y = x + 1 (x - 1)$; |
| к) $y = x^2 + 2 x - 1 $; | л) $y = -x^2 + 3 - x $. | |

3. Сколько общих точек могут иметь графики функций а) $y = ax^2 + bx + c$ и $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$;

б) $y = k|x - d| + e$ и $y = k_1|x - d_1| + e_1$; в) $y = ax^2 + bx + c$ и $y = k|x - d| + e$?

4. Прямая $y = kx + t$ пересекает параболу $y = ax^2 + bx + c$ в двух точках. Известно, что k, t, a, b, c и обе координаты одной из точек пересечения — рациональные числа. Верно ли, что обе координаты второй также рациональны?

5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему условию.

- | | | |
|---------------------|---------------------------|--------------------------------|
| а) $ y \geq x^2$; | б) $ y \leq x^2 - 9 $; | в) $ y - 1 \leq x^2 - 2 x $. |
|---------------------|---------------------------|--------------------------------|

6. Для каждого a определите число решений следующего уравнения:

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| а) $x^2 - 2x = a$; | б) $ x^2 - 4x - 5 = a$; | в) $ x^2 + 2 x - 8 = a$; |
| г) $6x - 9 - x^2 = a x - 3 $; | д) $ x + 3 - a x + 1 = 3$. | |