Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x — неизвестное, а a, b, c — произвольные числа, причём $a \neq 0$. Корни этого уравнения будем обозначать через $x_{1,2}$.

Алгоритм нахождения корней.

1. Вычисляем *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то корней нет.
3. Если $D \geqslant 0$, то корни ищутся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Корней два, если $D > 0$ и один, если $D = 0$.

Упрощённая формула.

Если b имеет вид $2p$ (например, b равно 4, -6, $2\sqrt{2}$), то формулу корней квадратного уравнения можно упростить следующим образом: $\widetilde{D} = \frac{D}{4} = p^2 - ac$, $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{\widetilde{D}}}{a}$.

Биквадратное уравнение.

Биквадратным уравнением называется уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Его можно свести к квадратному, сделав замену $y = x^2$. То есть сначала найти корни $y_{1,2}$ уравнения $ay^2 + by + c = 0$, а потом решить уравнения $x^2 = y_{1,2}$.

Теорема Виета.

Теорема 1. *Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение — свободному члену, т.е.*

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Теорема 2. (Обратная теорема Виета) *Любые два числа x_1 и x_2 являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$.*

Разложение на множители.

Разложить на множители выражение вида $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ означает представить его в виде $a'(x - x_1)(x - x_2)$.

Теорема 3. *$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если у квадратного уравнения корней нет, то разложить на множители нельзя.*

1. Решите уравнения:

а) $x^2 - x - 2 = 0$; **б)** $5x^2 - 3x - 2 = 0$; **в)** $9x^2 - 4 = 0$;
г) $x^2 + 8x = 0$; **д)** $-\frac{1}{2}x + 3x^2 = 11$; **е)** $3x^2 + 8 = x$;
ж) $2x^2 - 3x - 1 = 0$; **з)** $9x^2 + 4 = 12x$; **и)** $4x^2 - 9x - 13 = 0$;
к) $30x^2 - 11x + 1 = 0$; **л)** $(x-1)(x+2) = 2x$; **м)** $(3x-1)(2x+3) = (x+9)(2x+5)$.

2. Решите уравнения:

а) $1996x^2 - 1000x - 996 = 0$; **б)** $x^2 - 1997x + 1996 = 0$; **в)** $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
г) $\sqrt{2}x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0$; **д)** $x^2 - (8! + 90)x + 10! = 0$.

3. Решите уравнения относительно x.

а) $x^2 - (a - 2b)x - 2ab = 0$; **б)** $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$ ($|a| \neq |b|$);
в) $(a-b)^2x^2 - (a^2 - b^2)x + ab = 0$ ($a \neq b$); **г)** $x^2 + a(a-1)(a^2+a+1)x - a^5 = 0$.

4. Разложите на множители выражения.

а) $7x^2-3x-4$; **б)** $6x-5-x^2$; **в)** $3x^2-10x+2$;
г) $9x-x^2$; **д)** $(2x-1)^2-5(2x-1)+6$; **е)** x^4-13x^2+36;
ж) x^6-9x^3+8; **з)** $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$; **и)** $5x^2-6xy+y^2$;
к) $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$; **л)** $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)-297$; **м)** $4x^2+3x+1$;
н) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)-5$.

5. Решите уравнения.

а) $(x-1)^2+|x-1|-2=0$; **б)** $x^4-100x^2+99=0$;
в) $3x-2=\left|\dfrac{5x-1}{x+3}\right|$; **г)** $1+(b^2-4a^2)x^2-4a^2b^2x^4=0(ab\neq 0)$;
д) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$; **е)** $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{3}{x-5}=0$;
ж) $x^2+5x+6=\dfrac{15(x^2+3x+6)}{x^2+x}$; **з)** $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$;
и) $(x+2)^4+x^4=82$.

6. Найдите наименьшее значение выражения.

а) $2x^2+1$; **б)** x^2-2x+5; **в)** x^2-3x+1;
г) $2x^2-4x+3$; **д)** x^2-x; **е)** $3x^2+5x-1$.

7. Найдите наибольшее значение выражения.

а) $3-2x^2$; **б)** $4x+3-x^2$; **в)** $5x-2-x^2$; **г)** $9-6x-2x^2$;
д) $3x-x^2$; **е)** $4+7x-3x^2$; **ж)** $\dfrac{1}{x^2-x+1}$.

8. Найдите наибольшее значение ab, если $a+2b=1$.

9. Пусть x_1 и x_2 — отличные от нуля корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Докажите, что числа $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$ — корни квадратного уравнения $cx^2+bx+a=0$.

10. Пусть x_1 и x_2 — отличные от нуля корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Не пользуясь формулой для корней квадратного уравнения, вычислите

а) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; **б)** $x_1^2+x_2^2$; **в)** $x_1^3+x_2^3$; **г)** $x_1^4+x_2^4$.

11. Известно, что p и q — корни квадратного уравнения p и q. Найдите p и q.

12. Пусть D — дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Имеет ли это уравнение корни и каковы их знаки, если

а) $D>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$; **б)** $D>0$, $a>0$, $b<0$, $c>0$;
в) $a<0$, $c<0$; **г)** $a<0$, $c>0$; **д)** $ac<0$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых следующее уравнение имеет ровно один корень.

а) $x^2-6x-a=0$; **б)** $x^2-2ax-a=0$; **в)** $4ax^2-4x+1=0$;
г) $(a-1)x^2+2ax-a=1$; **д)** $(2-a)x^2-(a+1)x+a=1$. **е)** ъ

14. Найдите все значения a, при каждом из которых следующее уравнение имеет два положительных корня.

а) $x^2-4x+a=0$; **б)** $x^2-2(a+1)x+a^2+2=0$; **в)** $x^2-(a^2+2)x+a^2+1=0$.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых следующее уравнение имеет два корня разных знаков.

а) $x^2-(3a+1)x-a^2=0$; **б)** $ax^2+(2a-1)x-a=0$; **в)** $ax^2-(a-1)^2x+a=2$.

16. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих следующему уравнению:

а) $x^2-y^2=3$; **б)** $x^2-9y^2=7$; **в)** $x^2+xy-6y^2=6$.