Введение.

Здесь мы будем считать известными все изученные ранее свойства чисел. Например, $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$ и т.д.

В то же время, представим себе, что сравнивать числа между собой мы ещё не умеем, и только сейчас собираемся этому научиться. Существует два подхода к введению понятия неравенства. Первый из них состоит в том, что формулируется определение понятия «больше» (или «меньше»), из этого определения выводится несколько важных свойств неравенств, затем из уже доказанных свойств выводится всё то, что мы собираемся изучать в дальнейшем.

При втором подходе все начинается с формулировки тех нескольких свойств неравенств (назовём их основными свойствами числовых неравенств), которых должно хватить для изучения всего школьного курса алгебры. Мы будем придерживаться второго подхода.

Основные свойства числовых неравенств.

1. Для любых двух чисел a и b, верно одно и только одно из следующих трёх соотношений: $a > b$, $b > a$, $a = b$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

3. Если $a > b$, а c — любое число, то $a + c > b + c$.

4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;

5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;

   Из этих четырёх свойств неравенств и из известных нам свойств числовых равенств мы попытаемся вывести разные интересные и важные свойства числовых неравенств. Вот пример доказательства некоторого утверждения, связанного с числовыми неравенствами.

   Пример 1°. Докажите, что $1 > 0$.

   □ Считаем известным, что $1 \neq 0$. Тогда по свойству 1 либо $1 < 0$, либо $1 > 0$. Предположим, что $1 < 0$. Умножив обе части этого неравенства на число 1, получаем по свойству 5, что $1 > 0$. Значит, $1 > 0$ и $1 < 0$, что противоречит свойству 1. ■

Дальнейшие свойства числовых неравенств.

6. Любое слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую, меняя знак этого слагаемого на противоположный, т. е. если $a > b$, то $a - b > 0$.

7. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, т. е. если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

8. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак неравенства "уменьшаемого", т. е. если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

   Определение. Говорят, что $a \geqslant b$, если $a > b$ или $a = b$; $a \leqslant b$, если $a < b$ или $a = b$;

   a — положительное число, если $a > 0$;

   a — отрицательное число, если $a < 0$;

   a — неотрицательное число, если $a \geqslant 0$.

9. Квадрат любого числа неотрицателен, то есть для любого числа a верно неравенство $a^2 \geqslant 0$.

   Определение модуля (абсолютной величины числа). Модулем неотрицательного числа a называется само число a, модулем отрицательного числа a называется число $-a$, или

   $|a| = a$, если $a \geqslant 0$, $|a| = -a$, если $a < 0$.

10. Модуль любого числа неотрицателен, то есть для любого числа a верно неравенство $|a| \geqslant 0$.

11. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно перемножать, т.е. если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, а также $a > b$ и $c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$.

12. Если $a > b \geqslant 0$, то $a^2 > b^2$.
13. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
14. Неравенства противоположного смысла с положительными членами можно почленно делить, оставляя знак неравенства "делимого", то есть если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, а также $a > b$ и $c < d$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Пример 2°. (*Доказательство свойства 7*) Поскольку $a > b$, то $a + c > b + c$ (свойство 3). Аналогично, из неравенства $c + d$ следует неравенство $b + c > b + d$. Мы получаем, что $a + c > b + c > b + d$ и по свойству 2 $a + c > b + d$.

Задачи

Докажите неравенства:

1. $3a^4 + a^2 + \frac{1}{5} > 0$ для всех a;

2. $a^2 - 2a + 2 > 0$ для всех a;

3. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant ab$ для всех a и b;

4. $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2}$ для всех неотрицательных a и b;

5. $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ для всех натуральных n;

6. $x^2 - 2xy + 2y^2 \geqslant 0$ для всех x и y;

7. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 > 0$ для всех x и y;

8. $x^2 + 2y^2 + 3 > x + 2y$ для всех x и y;

9. $3x^2 - 2xy + y^2 - x + 1 > 0$ для всех x и y;

10. $x^2 + 4y - 4xy - 2x + 4y^2 + 1 > 0$ для всех x и y;

11. $|a + \frac{1}{a}| \geqslant 2$ для всех a, отличных от нуля;

12. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$ для всех a, b и c;

13. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$ для всех положительных a,b и c;

14. $\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}$ для всех положительных a,b и c;

15. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ для всех положительных n;

16. $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ для всех x;

17. $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ для всех x;

18. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ для всех a и b;

19. $|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$ для всех a и b;

20. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$ для всех натуральных n;

21. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$ для всех натуральных n;

22. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} < \frac{1}{10}$;

23. Известно, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(-3) < -5$, $f(-1) > 0$, $f(1) < 4$. Докажите, что $a < -\frac{1}{8}$;

24. $(ab + bc + ac)^2 \geqslant 3abc(a + b + c)$ для всех a, b и c.