Задача 1. Найдется ли n, при котором многочлен $1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$ имеет более одного корня из $\mathbb{R}$?

Задача 2. Может ли уравнение $x(x^2-1)(x^2-1000)=\alpha$ при некотором $\alpha\in\mathbb{R}$ иметь 5 целых корней?

Задача 3. Пусть $k\in\mathbb{R}$, функция f определена на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), причем $|f'(x)|\leqslant k$ при любом $x\in(a,b)$. Докажите, что при любых $x,y\in(a,b)$ выполнено неравенство $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$.

Задача 4. Пусть $n\in\mathbb{N}$, n не является точной четвёртой степенью. Докажите, что тогда $\{\sqrt[4]{n}\}>\frac{1}{4}n^{-3/4}$.

Задача 5. Найдите суммы: **а)** $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$; **б)** $C_n^1+2C_n^2x+\dots+nC_n^nx^{n-1}$.

Задача 6. **а)** Точка с координатами $(x(t),y(t))$ движется в плоскости xOy так, что в каждый момент времени t выполнено $y'(t)=1/x(t)$, $x'(t)=-1/y(t)$. В некий момент времени точка имела координаты $(12,3)$. Может ли она в какой-нибудь другой момент иметь координаты $(6,5)$? Нарисуйте траекторию движения точки. **б)** Те же вопросы для точки, движущейся по закону $y'(t)=-x(t)$, $x'(t)=y(t)$.

Задача 7. **а)** Для каждого x из множества $\{-2,-1,-1/2,-1/3,\ 0,\ 1/3,\ 1/2,\ 1,\ 2\}$ нарисуйте на плоскости pOq график прямой, задающейся уравнением $x^3+px+q=0$. Докажите, что все прямые вида $x^3+px+q=0$ на плоскости pOq касаются некоторой кривой. Что это за кривая?
б) Задайте уравнением множество таких точек (p,q), что многочлен x^3+px+q имеет кратный корень. Нарисуйте на плоскости это множество, а также множества таких точек (p,q), что x^3+px+q имеет три разных корня, корень кратности 2, корень кратности 3, не имеет действительных корней.
в) Сколько корней у многочлена $x^3-10x+12$?
г) Исследуйте геометрически число корней уравнения $x^3+px+q=0$ на отрезке $[-1;1]$.

Задача 8. Пусть f определена на $[0,1]$ и дифференцируема на $(0,1)$, причём $f(0)=0$, $f(1)=1$. Докажите, что тогда найдутся такие различные $s,t\in[0,1]$, что $f'(s)\cdot f'(t)=1$.

Задача 9. Петя идёт **а)** по плоскому полю; **б)** по холмистой местности из пункта A в пункт B, нигде не останавливаясь. Всегда ли на его пути найдётся точка, вектор скорости в которой параллелен AB?

Задача 10. Вычислите пятьдесят седьмую производную в нуле у функции $\arcsin(x^{13}+x^{22})$.

Задача 11. Докажите, что у многочлена $x^{1024}+a_1x^{512}+a_2x^{256}+\dots+a_9x+a_{10}$, где $a_1,\dots,a_{10}\in\mathbb{R}$, может быть не более 11 различных положительных действительных корней.

Задача 12. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n>1$, имеющий n различных корней $x_1,\dots,x_n$. Докажите, что справедливо равенство $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\dots+\frac{1}{P'(x_n)}=0$.

Задача 13. Функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Верно ли, что f' ограничена на любом отрезке?

Задача 14*. Найдите все такие дифференцируемые $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ при любых $x\neq y$.

Задача 15*. Решите в натуральных числах уравнение $x^y=y^x$. (*Указание:* изучите функцию $f(x)=x^{1/x}$).

Задача 16*. *(Правило Лопиталя)* Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b), причем g' не обращается в ноль на (a,b) и **а)** $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\lim\limits_{x\to b}g(x)=0$; **б)** $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\lim\limits_{x\to b}g(x)=+\infty$.
Предположим, что существует предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$. Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен k.

Задача 17*. Останется ли верным правило Лопиталя, если заменить в условии b и/или k на $\pm\infty$?

Задача 18*. Найдите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x/x^{\alpha}$ при $\alpha>0$; **в)** $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

Задача 19*. Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция на отрезке $[0,a]$, $f(0)=f(a)=0$ и f'' непрерывна на отрезке $[0,a]$. **а)** Докажите, что при $a=\pi$ справедливо утверждение: «существует такая точка $\xi\in(0,a)$, что $f''(\xi)+f(\xi)=0$». **б)** Верно ли утверждение предыдущего пункта для $a=3$?

Задача 20.** Существует ли непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, ни в одной точке не имеющая производной?

Задача 21. **а)** Функция f дифференцируема n раз на $\mathbb{R}$, и для каждой точки $a\in\mathbb{R}$ одна из функций f, f', f'', …, $f^{(n)}$ обращается в ноль в точке a. Докажите, что f — многочлен степени не более чем $n-1$.
б)** Функция f определена и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ — ее n-тая производная. Пусть для каждого $a\in\mathbb{R}$ найдется такое $n\in\mathbb{N}$, что $f^{(n)}(a)=0$. Докажите, что f — многочлен.

1	2	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г	8	9 а	9 б	10	11	12	13	14	15	16 а	16 б	17	18 а	18 б	18 в	19 а	19 б	20	21 а	21 б