

Логарифмы

Определение 1. $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$\log_a b$ существует и единственен для любых $a, b > 0$, $a \neq 1$

Выделяют два специальных вида логарифмов: $\log_{10} a = \lg a$ и $\log_e a = \ln a$.

Свойства логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Задача 1. Вычислите:

а) $\log_5 50 + \log_5 \frac{1}{2}$;

б) $3 \log_3 2 - \log_3 72$;

в) $\log_9 \sqrt[6]{3} (27 \sqrt[6]{3})$

Задача 2. Докажите, что $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.

Задача 3. Вычислите:

а) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$;

б) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;

в) $\frac{(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49})(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9})}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$;

г) $\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{4}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_2 57}} - 125^{\log_{25} 6} \right)$;

д) $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$